сж линейни функции. Това е случай на тъй наречената множествена (multiple) корелация, чиято теория е много по-сложна, както отъ математична, така и отъ логична гледна точка. Прилагане на нашитѣ аналитични приоми допринася, обаче, и тукъ за по-голѣма логическа ясность. Ние сполучваме, при това, да откриемъ източници на нѣколко грѣшки, правени отъ статистици, прилагащи на практика формулитѣ на множествената корелация.

II.

Нека предположимъ, че сж дадени $(n+1)$ редове съ случайни промѣнливи и нека всѣки редъ се състои отъ N члена:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{нулевия редъ: } X_1^{(0)},\ X_2^{(0)},\ X_3^{(0)},\ \ldots\ X_N^{(0)};\\
\text{първия редъ: } X_1^{(1)},\ X_2^{(1)},\ X_3^{(1)},\ \ldots\ X_N^{(1)};\\
\text{втория редъ: } X_1^{(2)},\ X_2^{(2)},\ X_3^{(2)},\ \ldots\ X_N^{(2)};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n\text{-тия редъ: } X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ X_3^{(n)},\ \ldots\ X_N^{(n)}.
\end{array}\right\}\ [14]$$

Да предположимъ сега, че всѣки членъ отъ нулевия редъ е свързанъ чрезъ свободни (стохастически) връзки съ едноименнитѣ членове на останалитѣ редове, т. е., че

$$\left.\begin{array}{l}
X_1^{(0)} = f\ (X_1^{(1)},\ X_1^{(2)},\ X_1^{(3)},\ \ldots\ X_1^{(n)}) + E_1\\
X_2^{(0)} = f\ (X_2^{(1)},\ X_2^{(2)},\ X_2^{(3)},\ \ldots\ X_2^{(n)}) + E_2\\
X_3^{(0)} = f\ (X_3^{(1)},\ X_3^{(2)},\ X_3^{(3)},\ \ldots\ X_3^{(n)}) + E_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_N^{(0)} = f\ (X_N^{(1)},\ X_N^{(2)},\ X_N^{(3)},\ \ldots\ X_N^{(n)}) + E_N
\end{array}\right\}\ [15]$$

За разлика отъ случая на корелацията между две промѣнливи, ние тукъ, следвайки общия примѣръ, предполагаме, че случайнитѣ промѣнливи фигуриратъ въ функция f съ цѣлата си голѣмина, т. е., че компонентата ξ въ тия промѣнливи винаги съвпада съ X. Това се прави, главно, за опростяване на математическитѣ изчисления, които въ противенъ случай ставатъ твърде комплицирани. Макаръ че това допущане, само по себи си, не намалява общностьта на формулитѣ отъ система [15], понеже неточноститѣ се поглъщатъ отъ остатъчнитѣ членове E, все пакъ, то е източникъ на известни логически мжчнотии при интерпретирането на полученитѣ формули, особено на тая за тъй наречения коефициентъ на частичната корелация.

Ние ще разгледаме тукъ само най-простия случай—който, при това, е най-добре разработенъ теоретически —, когато връзкитѣ между членоветѣ на реда № 0 съ останалитѣ редове иматъ характеръ на линейни функции отъ първа степень.

При това условие нашата система [15] приема следния видъ:

$$\begin{array}{l}
X_1^{(0)} = b_{01} X_1^{(1)} + b_{02} X_1^{(2)} + b_{03} X_1^{(3)} + \ldots + b_{0n} X_1^{(n)} + E_1\\
X_2^{(0)} = b_{01} X_2^{(1)} + b_{02} X_2^{(2)} + b_{03} X_2^{(3)} + \ldots + b_{0n} X_2^{(n)} + E_2\\
X_3^{(0)} = b_{01} X_3^{(1)} + b_{02} X_3^{(2)} + b_{03} X_3^{(3)} + \ldots + b_{0n} X_3^{(n)} + E_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_N^{(0)} = b_{01} X_N^{(1)} + b_{02} X_N^{(2)} + b_{03} X_N^{(3)} + \ldots + b_{0n} X_N^{(n)} + E_N
\end{array}\quad [16]$$

Тукъ $b_{01}, b_{02}, b_{03} \ldots b_{0n}$ сж „априорни" коефициенти на пропорционалностьта, които се приематъ за постоянни презъ цѣлата серия отъ наблюдения.

Въ коефициентитѣ отъ типа b_{0j} първиятъ индексъ отдѣсно показва, че въ лѣвата часть на всѣко уравнение въ система [16] стои членътъ отъ нулевия редъ (редъ № 0), а вторитѣ индекси отдѣсно показватъ № на реда, за който се отнася коефициента, и, очевидно, съвпадатъ съ индекситѣ въ скоби при X. Обикновено, въ индекса на коефициентитѣ фигуриратъ още нумерата на всички редове, които, изобщо, влизатъ въ система [16]. Така, напримѣръ, вмѣсто b_{01}, пишатъ $b_{01 \cdot 234 \ldots n}$, вмѣсто b_{02}, пишатъ $b_{02 \cdot 134 \ldots n}$ и т. н. У насъ, обаче, подобна символика би усложнила много външния видъ на формулитѣ и за нашитѣ скромни цели тя е излишна.

Система [16] би могла, собствено, да представлява всѣкакъвъ видъ функционална зависимость между членоветѣ на нулевия редъ, отъ една страна, и тѣзи отъ всичкитѣ останали редове, отъ друга страна. Нали въ всѣко уравнение има остатъченъ членъ E, който, като буферъ, приема върху себе си цѣлата разлика между хипотезата и действителностьта. Числото 5, напр., съвсемъ не е равно на 100, обаче ние имаме право да напишемъ $5=100+E$, понеже при значение на $E=-95$ написаното равенство е вѣрно. По сжщата причина ние бихме могли да дадемъ на всѣки коефициентъ b произволно значение и система [16] пакъ би останала въ сила.

Ако, обаче, искаме система [16] да има не само формално-математически, но и логически смисълъ, ние трѣбва, освенъ предположението за линейностьта на връзката между редоветѣ, да поставимъ още условието, по причини, изложени въ първата часть на настоящата статия, въ система [16] да влизатъ само хомогенни редове. Съ други думи, необходимо е, при $g=1, 2, 3, 4 \ldots$,

$$\left.\begin{array}{l}
E(X_1^{(0)})^g = E(X_2^{(0)})^g = E(X_3^{(0)})^g = \ldots = E(X_N^{(0)})^g\\
E(X_1^{(1)})^g = E(X_2^{(1)})^g = E(X_3^{(1)})^g = \ldots = E(X_N^{(1)})^g\\
E(X_1^{(2)})^g = E(X_2^{(2)})^g = E(X_3^{(2)})^g = \ldots = E(X_N^{(2)})^g\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
E(X_1^{(n)})^g = E(X_2^{(n)})^g = E(X_3^{(n)})^g = \ldots = E(X_N^{(n)})^g
\end{array}\right\}\ [17]$$

Тѣзи условни равенства ще сж вѣрни, ако всички членове на всѣки даденъ редъ иматъ единъ и сжщъ законъ на разпредѣлението. Както и въ случай съ две промѣнливи, това изискване се въвежда въ интереса на логиката, а не на математическата техника, която може свободно да мине и безъ него. Що се отнася до остатъчната компонента E, за нея въпроса е малко по-сложенъ. Хомогенностьта й при направенитѣ допущания не предизвиква голѣми съмнения; но въ отличие отъ случая съ 2 промѣнливи, ние не винаги имаме право да допустнемъ, че значенията E сж независими отъ значенията на компонентитѣ X. Работата е тамъ, че при прилагането на практика формулитѣ на множествената корелация, ние почти винаги се движимъ по пжтя на последовател-