

Като вземем предъ видъ, че англичанитѣ наричатъ «емпирично стандартно отклонение» величинитѣ

$$\sigma_1' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}} \quad \text{и} \quad \sigma_2' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N y_i^2}{N}} \quad *) [2]$$

можемъ да пишемъ:
$$r_{12}' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sigma_1' \sigma_2'} \quad [3]$$

Отъ друга страна, означавайки b_1' чрезъ b_{12}' и b_2' чрезъ b_{21}' , ние имаме:

$$b_{12}' = \frac{\sigma_1'}{\sigma_2'} r_{12}'; \quad b_{21}' = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} r_{21}' \quad (\text{понеже } r_{12}' = r_{21}') [4]$$

Коефициентътъ r_{12}' се нарича *емпириченъ коефициентъ на корелацията*, а b_{12}' и b_{21}' — *емпирични коефициенти на регресиата*.

Изследването на математическитѣ свойства на коефициента на корелацията r_{12}' довежда до следнитѣ изводи: максималното негово значение е + 1; то се достига само, когато между съответнитѣ членове на 2-та реда съществува съотношение на права пропорционал-

ность, т. е. когато
$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_N}{y_N} = d,$$

и при това d е по-големо отъ нулата. Ако сжитѣ пропорции оставатъ въ сила, но даватъ d отрицателно, тогава ние имаме обратна пропорционалность между членоветѣ на 2-та реда и коефициента на корелацията r_{12}' стига своя минимумъ — 1. Изобщо, колкото връзката между съответнитѣ членове на 2-та реда е по-отдалечена отъ „идеалната“ връзка на пропорционалността (права или обратна), толкова по-вече коефициента r_{12}' се доближава до нула, което значение се достига, най-после, когато

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = 0$$

Обаче, както ще видимъ по-долу, значението на $r_{12}' = 0$ още не означава, че между x и y нѣма никаква зависимостъ.

Изложениетѣ изводѣ отъ формулата за коефициента на корелацията (особено, ако той е усложненъ съ разглеждането на редоветѣ и колонитѣ на тѣй наречената корелационна таблица съ класови интервали) крие въ себе си голѣми опасности, понеже създава лесно преувеличена представа за значението на този коефициентъ и за предѣлитѣ на неговото прилагане, които изглеждатъ по-широки, отколкото сж въ действителность.

*) По правилно би било да се постави въ знаменателя на подкоренната величина не N , а $(N-1)$; но при що-годе значително N тази поправка нѣма почти никакво практическо значение.

Даже въ случай, когато закона за връзката (зависимостта) между x_i и y_i може съ успѣхъ да се представи въ видѣ на уравнение отъ първа степенъ и е замъгленъ само отъ незначителни *случайни* причини, коефициентътъ на корелацията, изобщо казано, не дава пълна характеристика на всичкитѣ особености на тази зависимостъ. Заедно съ другитѣ 4 параметри, той я дава само тогава, когато законътъ на взаимозависимостта на двата реда представлява тѣй наречената „нормална повърхность на корелацията“, т. е. само въ единъ частенъ случай*).

Точно така, едно измѣрване на дължината на парахода, макаръ че представлява една много важна техническа характеристика, не ни дава още точна представа, нито за неговата широчина и тонажъ, нито за неговата бързина и други морски качества. Обаче, ако ни е известенъ точниятъ типъ на парахода (напр., свѣрхдреднаутъ, линейенъ крайцеръ и др.), тогава сжщото измѣрване на дължината говори на специалиста много повече.

Ако зависимостта между y и x нѣма линейенъ характеръ, тогава коефициентътъ на корелацията може да доведе до съвсемъ невѣрни изводи. Освенъ това, не може достатъчно да се подчертае обстоятелството, че коефициента на корелацията не може никакъ да се прилага извънъ установенитѣ предѣли на свободни, стохастически връзки, т. е. извънъ случайтѣ, при които, изобщо, има смисълъ да се измѣрва силата или степенъта на връзката между два или повече редове. Въпросътъ за „тѣснотата“ (така ще наричаме интензивностьта, якостта — б. пр.) на връзката между две математически функции на една и сжща промѣнлива нѣма никакъвъ смисълъ: връзката между x и $\sin x$ е точно толкова „тѣсна“, колкото между x и x^2 , или x и kx . Това ограничение не изпъкна направо отъ изложениетѣ изводѣ на формулата, обаче справедливостта му може лесно да се докаже съ нѣколко примѣри.

Нека имаме 2 реда:

$$\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5, 6 \dots N \\ \text{и } 1k, 2k, 3k, 4k, 5k, 6k \dots Nk \end{matrix}$$

Между съответнитѣ членове на тия два реда съществува пропорционалность и, както отбелязахме по-горе, коефициента на корелацията приема значение + 1, ако k е положително, и — 1, ако k е отрицателно. Да вземемъ сега съотношението между реда на първитѣ степени на натуралнитѣ числа и на квадратитѣ имъ.

$$\begin{matrix} 1, 2, 3, 4, 5 \dots N \\ 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 \dots N^2 \end{matrix}$$

Оказва се, че тѣхния коефициентъ на корелацията промѣня голѣмината си въ зависимостъ отъ последното число N , съ което свършва реда; въ предѣла, когато N се стреми къмъ безкрайность, този коефициентъ се равнява на + 0,968.

*) Ср. моята, цитирана по-горе: „Korrelationsrechnung“, стр. 104.