транството. Затова нека допуснем, че центърът на множеството съвпада с центъра на координатната система $\sum_{r=1}^{n} x_{ri} = 0, i = 1 \ldots p$.

Тогава $d_{rs}^2 = x_r^T x_r + x_s^T x_s - 2x_s^T x_r$, откъдето чрез сумиране по съответните индекси получаваме:

$$\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} d_{rs}^2 = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} x_r^T x_r + x_s^T x_s;$$

$$\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} d_{rs}^2 = x_s^T x_s + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} x_s^T x_s;$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} d_{rs}^2 = \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n} x_r^T x_r.$$

Сумирайки тези три равенства, получаваме:

$$x_r^T x_r = -\frac{1}{2}\left(d_{rs}^2 - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} d_{rs}^2 - \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} d_{rs}^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} d_{rs}^2 \right). \tag{1}$$

Да означим с $A = \left\{ -\frac{1}{2} d_{rs}^2 \right\}$ матрицата от квадратите на разстоянията и нека $H = I_n - \frac{1}{2} 1 1^T$, където I_n е матрица с n и n стълба, всички елементи на която са нули, с изключение на тези по главния диагонал, които са единици. С $1 = (1 \ldots 1)^T$ означаваме вектор, състоящ се от единици. Следователно, записвайки (1) в матричен вид, получаваме уравнението $XX^T = HAH$, където рангът на матрицата е равен на размерността на пространството: $rank\left(XX^T\right) = rank\left(X\right) = p$. Ако XX^T е положителна и полуопределена с ранг p, то можем да се възползваме от разлагането $XX^T = V\Lambda V^T$, където $\Lambda = diag\left(\lambda_1 \ldots \lambda_n\right)$ е диагоналната матрица от собствените стойности, $\lambda_i, i = 1 \ldots n$, а V е матрицата от собствените вектори.

Тогава проекциите на точките $x_r, r = 1 \ldots n$ по съответните направления на пространството могат да се изразят чрез $X = V_1 \Lambda_1^{\frac{1}{2}}$, където Λ_1 е матрицата от ненулевите собствени стойности и V_1 е матрицата от съответните собствени вектори.

Всичко това може да бъде обобщено в алгоритъма:

1. Определяме разстоянията между точките $\left\{ d_{rs} \right\}$.