En divisant le numérateur et le dénominateur de (4) par $(k+l)^{n-1}$ nous obtenons

$$(6)\qquad P_{n,m}=\binom{n}{m}\frac{p(p+\lambda)\ldots[p+(m-1)\lambda]\,q}{(1+\lambda)(1+2\lambda)\ldots[q+(n-m-1)\lambda]}\cdot\frac{}{[1+(n-1)\lambda]}.$$

En désignant par

$$(7)\qquad np=a,\ p=\frac{a}{n},\ q=1-\frac{a}{n},\ \frac{a}{k}=g,$$

nous avons

$$(8)\qquad \lambda=\frac{a}{nk}=\frac{g}{n}.$$

Nous allons trouver la limite de $P_{n,m}$, en supposant que a, g, m restent fixés, tandis que n s'accroît d'une manière illimitée. Alors il ressort de (8) que λ tendra vers zéro. Trouvons d'abord la limite de l'expression

$$i_n=\binom{n}{m}p(p+\lambda)\ldots[p+(m-1)\lambda].$$

Nous avons pour elle

$$i_n=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{a+g}{n}\cdots\frac{a+(m-1)g}{n}$$

$$=\frac{a(a+g)\ldots[a+(m-1)a]}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Donc

$$(9)\qquad \lim_{n\to\infty} i_n=\frac{a(a+g)\ldots[a+(m-1)g]}{m!}$$

Il reste à examiner l'expression

$$v_n=\frac{(q+\lambda)(q+2\lambda)\ldots[q+(n-1)\lambda]}{(1+\lambda)(1+2\lambda)\ldots[1+(n-1)\lambda]}$$

dans laquelle, en remplaçant

$$q=1-\frac{a}{n},\ \lambda=\frac{g}{n},$$

on obtient

$$(10)\qquad v_n=\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1-\frac{a}{n}+i\frac{g}{n}}{1+i\frac{g}{n}}=\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{\frac{a}{n}}{1+i\frac{g}{n}}\right).$$

Pour plus de facilité, nous allons examiner

$$u_n=-\log v_n=-\sum_{i=1}^{n-1}\log\left(1-\frac{a}{n+ig}\right).$$

Désignons par $\varphi(x)$ la fonction

$$\varphi(x)=-\log\left(1-\frac{a}{n+gx}\right).$$

u_n a la forme

$$u_n=\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n-1).$$

Pour $n\geq a$ la fonction $\varphi(x)$ est positive pour $x\geq 0$. Vu que

$$\varphi'(x)=-\frac{1}{1-\frac{a}{n+gx}}\,\frac{ag}{(n+gx)^2}<0,$$

$\varphi(x)$ est une fonction décroissante. Donc on aura

$$\int_1^2\varphi(x)\,dx<\varphi(1)<\int_0^1\varphi(x)\,dx,$$

$$\int_2^3\varphi(x)\,dx<\varphi(2)<\int_1^2\varphi(x)\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_{n-1}^{n}\varphi(x)\,dx<\varphi(n-1)<\int_{n-2}^{n-1}\varphi(x)\,dx.$$

d'où par addition on obtient

$$\int_1^n\varphi(x)\,dx<u_n<\int_0^{n-1}\varphi(x)\,dx.$$

Etant donné que pour x fixé et fini la fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro, lorsque n s'accroît d'une manière illimitée, il s'ensuit facilement que la différence

$$i_n=u_n-\int_0^n\varphi(x)\,dx$$

tend vers zéro.

Par conséquent il faut trouver la limite de

$$\int_0^n\varphi(x)\,dx=-\int_0^n\log\left(1-\frac{a}{n+gx}\right)dx=$$

$$=-x\log\left(1-\frac{a}{n+gx}\right)\Big|_0^n+$$

$$+ag\int_0^n\frac{dx}{(n+gx)(n-a+gx)}=$$

$$=-n\log\left(1-\frac{a}{n+gn}\right)+\int_0^n\frac{g\,dx}{n-a+gx}=$$

$$=-\int_0^n\frac{g\,dx}{n+gx}=-n\log\left(1-\frac{a}{n+ng}\right)+$$

$$+\log\frac{n-a+gx}{n+gx}\Big|_0^n=-n\log\left(1-\frac{a}{n+ng}\right)+$$

$$+\log\frac{n-a+gn}{(1+g)(n-a)}.$$

La première expression additionnable tend vers $\frac{a}{1+g}$, et la seconde vers zéro. Donc on a

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{a}{1+g},$$

d'où l'on obtient

$$\lim_{n\to\infty}v_n=e^{-\frac{a}{1+g}}.$$

Vu que $q=1-\frac{a}{n}$ tend vers 1, on obtient ainsi que la limite de $P_{n,m}$ est égale

$$(11)\qquad \psi(m)=\frac{a+g)\ldots[a+(m-1)g]}{m!}e^{-\frac{a}{1+g}},$$

qui représente une formule asymptotique de la probabilité. En posant g=0, nous obtenons dans le cas partiel la formule de Poisson. La série $\Sigma\psi(m)$, pour $g>1$, est divergente. La formule ci-dessus est approximative si g est petit et si m n'est pas grand. De cette formule nous