En comparant les coefficients de z^n dans les deux parties de cette équation, nons obtenons la proposition:

Les polynômes $p_n(x, a)$ *satisfont à l'équation*

$$(12) \quad ap_{n+1}(x,a)=(x-a-n)\,p_n(x,a)-np_{n-1}(x,a).$$

De cette dépendance nous déduirons une propriété des zéros des polynômes $p_n(x,a)$, en nous basant sur un théorème de Sturm de l'algèbre. Ce théorème est ainsi conçu:

Supposons que $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ soient une série de polynômes de degrés respectivement égaux à leurs indices, entre lesquels nous avons les relations

$$P_m(x)=(\alpha_m x+\beta_m)\,P_{m-1}(x)-\gamma_m P_{m-2}(x)$$
$$m=2, 3\ldots, n.$$

où les termes $P_0(x)$, α_m, β_m sont réels, γ_m étant aussi bien réels que positifs. Si la série de polynômes n'a que des variations des signes pour $x=a$ et des permanences pour $x=b$, $(b>a)$, les équations

$$P_m(x)=0, \quad m=2, 3, \ldots, n,$$

ont toutes leurs racines réelles et disposées dans l'intervalle (a, b). Du reste, les racines de $P_{m+1}(x)=0$ séparent celles de $P_m(x)=0$.

On voit par (12) que les polynômes

$$p_0(x,a)\; p_1(x,a), \ldots p_n(x,a),\; a>0,$$

forment, pour chaque n, une pareille série de Sturm. Etant donné que pour $x=0$ nous avons $p_n(0,a)=(-1)^n$ et pour $x=\infty\; p_n(\infty, a)>0$, nous obtenons en appliquant le théorème ci-dessus:

Les zéros des polynômes $p_n(x, a)$, *pour* $a>0$, *sont tous réels et positifs. Du reste, les zéros de* $p_{n-1}(x,a)$ *séparent ceux de* $p_n(x, a)$.

Par cette propriété, la différence entre les polynômes de Charlier et ceux de Hermite dont les zéros sont réels et non seulement positifs, dévient évidente.

De la formule (8) on peut obtenir des formules asymptotiques pour les polynômes $p_n(x,a)$, qui seront nécessaires pour l'examen de la convergence de la série de Charlier.

3. Dans ce paragraphe nous déduirons une une autre formule asymptotique pour la répartition des probabilités, qui précise celle de Poisson. Pour plus de clarté, nous indiquerons le principe de construction de la formule de Poisson. Supposons que A soit un phénomène ayant la probabilité p et $\bar{A}$ soit son phénomène contraire, ayant par conséquent une probabilité égale à $q=1-p$. Nous effectuons n essais indépendants, en désignant par $P_{n,m}$ la probabilité pour que le phénomène A arrive m fois. Par exemple, supposons que le phénomène A consiste à tirer une balle blanche lors du retrait d'une seule balle dans un coffret contenant en tout a_1 balles blanches et b_1 balles noires, c'est-à-dire

$$p=\frac{a_1}{a_1+b_1}, \quad q=\frac{b_1}{a_1+b_1}.$$

Dans ce cas $P_{n,m}$ représentera la probabilité de tirer m balles blanches lors de n retrait à raison d'une balle avec retour. On sait que

$$(1) \qquad P_{n,m}=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}.$$

Supposons à présent que n croît à l'infini, l'espérance mathématique de m, exprimée par

$$(2) \qquad a=np$$

restant fixée. Trouvons la limite de $P_{n,m}$, en supposant que m soit fixé lui-aussi. Nous avons

$$p=\frac{a}{n}, \quad q=1-\frac{a}{n},$$

de sorte que l'expression (1) reçoit la forme

$$P_{n,m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\frac{a^m}{n^n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}$$

$$=\frac{a^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}.$$

Les termes $1-\frac{k}{n}$, $1\leqq k\leqq m-1$, tendent à 1, lorsque n s'accroît d'une manière illimitée, et $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n$, comme on le sait, tend vers e^{-a}. Par conséquent, la limite de $P_{n,m}$ est égale à

$$(3) \qquad \frac{a^m}{m!}e^{-a},$$

expression qui représente la formule de Poisson.

Il ressort de la déduction elle-même que la formule de Poisson donnera la probabilité avec plus d'approximation, lorsque p est assez petit, c'est-à-dire elle se rapporte aux phénomènes qui arrivent rarement. Dans ces cas, elle est plus avantageuse que la formule de Laplace qui est asymptotique, mas dans laquelle l'égalité (2) ne reste pas en vigueur.

Nous obtenons une généralisation de la loi de Poisson en partant du problème suivant: nous avons un coffret contenant k balles blanches et l balles noires; il n'y a pas d'autres balles. Nous en tirons à raison d'une balle, la balle tirée étant retournée dans le coffret et avec elle nous y ajoutons ρ balles de la même couleur que celle de la balle tirée. Nous cherchons la probabilité $P_{n,m}$ pour obtenir, dans n essais, m balles blanches. La probabilité cherchée est donnée par la formule

$$(4) \qquad P_{n,m}=\binom{n}{m}\frac{k(k+\rho)\ldots}{(k+l)}$$

$$\frac{[k+(m-1)\,\rho]\;l\,(l+\rho)\ldots[l+(n-m-1)\,\rho]}{(k+l+\rho\ldots(k+l+(n-1)\,\rho]}$$

Introduisons les notations

$$(5) \qquad \frac{k}{k+l}=p, \frac{l}{k+l}=q=1-p, \frac{1}{k}=\lambda.$$