$$c_2=\frac{a^2}{2}\sum_x\psi(x)\left[\frac{x(x-1)}{a^2}-\frac{2x}{a}+1\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_x x^2\psi(x)=\frac{1}{2}\sum_x x\psi(x)-a\sum_x x\psi(x)-$$
$$-a\sum_x x\psi(x)+\frac{a^2}{2}\sum_x\psi(x)=\frac{1}{2}m_2-$$
$$-\frac{1}{2}(1+2a)m_1+\frac{1}{2}a^2,$$
$$c_3=\frac{a^3}{3!}\sum_x\psi(x)\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{a^3}-3\frac{x(x-1)}{a^2}+\right.$$
$$\left.+3\frac{x}{a}-1\right]=\frac{1}{6}\sum_x\psi(x)(x^3-3x^2+2x)-$$
$$\frac{a}{2}\sum_x\psi(x)(x^2-x)+\frac{a^2}{2}\sum_x\psi(x)x-\frac{a^3}{6}\sum_x\psi(x)=$$
$$=\frac{1}{6}(m_3-3m_2+2m_1)-\frac{a}{2}(m_2-m_1)+$$
$$+\frac{a^2}{2}m_1-\frac{a^3}{6}=\frac{1}{6}m_3-\frac{1}{2}(1+a)m_2+$$
$$\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2}\right)m_1-\frac{a^3}{6},$$

. . . .

Dans un de ses ouvrages, G. Doetsch[1]) établit certaines nouvelles égalités des polynômes $P_n(x, a)$ de Charlier. Dans cet article je donne d'autres propriétés caractéristiques à ces polynômes, qui sont d'importance pour le traitement de la question relative à la convergence de la série de Charlier et qui nous indiquent l'origine naturelle des polynômes en question.

Ecrivons les polynômes $p_n(x, a)$, donnés par la formule (2), dans la forme suivante

$$(7)\qquad p_n(x,a)=\frac{n!}{a^n}\sum_{v=0}^{n}(-1)^{n-v}\frac{a^{n-v}}{(n-v)!}\binom{x}{v}=$$
$$=\frac{n!}{a^n}P_n(x).$$

Nous avons les développements

$$(1+z)^x=\sum_{v=0}^{\infty}\binom{x}{v}z^v,$$
$$e^{-az}=\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-a)^n z^n}{n!}.$$

Le premier est absolument convergent pour $|z|<1$, et le second pour chaque z et a finis. Par la multiplication de ces égalités nous obtenons

$$(1+z)^x e^{-az}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^n,$$

où nous avons

$$\lambda_n=\sum_{v=0}^{n}\frac{(-a)^{n-v}}{(n-v)!}\binom{x}{v}=P_n(x).$$

Etant donné que par (7) nous avons

$$P_n(x)=\frac{a^n}{n!}p_n(x,a),$$

[1]) G. Doetsch — Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charliershen Polinome und damit zusammenhängende Differential differenzen Gleichung, Mathematische Annalen, 109, (1933), стр. 257—266.

et de cette manière *nous obtenons le développement fondamental*

$$(8)\qquad (1+z)^x e^{-az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x,a).$$

On voit par là que les polynômes de Charlier appartiennent à une classe commune de polynômes obtenus par les développements d'une fonction de deux variables $f(x, z)$ d'après les degrés de z, les coefficients de z^n étant les polynômes en question. Des cas spéciaux de telles classes sont fréquemment examinés dans la science. Aussi la relation (8) nous aidera-t-elle beaucoup à établir les différentes propriétés des polynômes $p_n(x, a)$, ce que nous allons faire notamment.

Posons $(x+1)$ dans (8), au lieu de x, nous avons

$$(9)\qquad (1+z)^{x+1}e^{-az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x+1,a).$$

Nous extrayons (8) du (9) et obtenons

$$(10)\qquad z(1+z)^x e^{-az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}[p_n(x+1,a)-p_n(x,a)].$$

Vu que $p_0(x, a)=1$, cette relation peut s'écrire ainsi:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}z^n}{(n-1)}p_{n-1}(x,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}[p_n(x+1,a)-$$
$$-p_n(x,a)]$$

d'où, par la comparaison des coefficients de z dans les deux parties, nous avons

$$p_n(x+1,a)-p_n(x,a)=\frac{n}{a}p_{n-1}(x,a).$$

Par conséquent nous avons le théorème:

Les polynômes de Charlier satisfont à l'équation

$$(11)\qquad p_n(x+1,a)-p_n(x,a)=\frac{n}{a}p_{n-1}(x,a).$$

Différencions à présent (1) par rapprt à z, nous obtenons

$$x(1+z)^{x-1}e^{-az}-a(1+z)^x e^{-az}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x,a),$$

d'où, par la multiplication de $(1+z)$, nous avons

$$x(1+z)^x e^{-az}-a(1+z)^{x+1}e^{-az}=$$
$$=(1+z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x,a),$$

c'est-à-dire

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x,a)-a(1+z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x,a)=$$
$$=(1+z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x,a).$$