$$\frac{a^{y+1}\, e^{a\mu^{x+1}}}{(y+1)!} : \frac{a^y\, e^{a\mu^y}}{y!} = \frac{a}{y+1}\, e^{b\mu^y(\mu-1)}$$

et tend évidemment vers $\infty$, $\mu$ étant $> 1$ et vers 0, $\mu$ étant $\leqq 1$. Donc le nombre $\mu$ est au plus égal à 1. Les équations (17) peuvent être écrites ainsi, avec la désignation introduite:

$$C\, g(a, b) = 1. \quad C\, g(b, a) = 1,$$

d'où nous avons pour C,

$$C = \frac{1}{g(a, b)} = \frac{1}{g(b, a)}. \tag{18}$$

*Il s'ensuit que les constantes* a, b *sont réunies avec la relation* g (a, b)=g (b, a). *Les probabilités à priori sont données par les formules*

$$f(x) = \frac{1}{g(a,b)} \frac{b^x}{x!} e^{a\mu^x}, \quad \varphi(y) = \frac{1}{g(a,b)} \frac{a^y}{y!} e^{b\mu^y}, \tag{19}$$

Il est évident par les déductions ci-dessus que x et y ne seront indépendants que dans le cas où $\mu = 1$.

Supposons que $P(x, y)$ soit la probabilité pour que les variables prennent respectivement les valeurs x et y. On aura alors

$$P(x,y) = f(x)\, F_1(x,y) = C \frac{b^x}{x!} e^{a\mu^x} \frac{a^y \mu^{xy}}{y!} e^{-a\mu^x} = C \frac{a^y b^x \mu^{xy}}{x!\; y!}.$$

Par conséquent nons obtenons le théorème fondamental:

*Supposons que les variables* x, y *peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., mais elles sont réunies corrélativement de telle façon qu'en fixant la valeur de n'importe quelle d'entre elles, l'autre variable se soumet à la loi de Poisson relative à la répartition des probabilités. Alors la loi* P (x, y) *relative à la répartition générale des probabilités est donnée par*

$$P(x, y) = C \frac{a^y\, b^x\, \mu^{xy}}{x!\; y!},$$

où a, b, $\mu$, C sont des constantes positives, $\mu \leqq 1$, entre lesquelles nous avons les relations

$$g(a, b) = g(b, a), \quad Cg(a, b) = 1.$$

Désignons par $M\, y(x)$ l'espérance mathématique de x, y étant fixé, et par $M\, x(y)$ — l'espérance mathématique de y, x étant fixé. Nous avons

$$M_y(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{b^x\, \mu^{xy}}{(x-1)!} e^{-b\mu^y} = e^{-b\mu^y}\, b \sum_{x=0}^{\infty} \frac{b^x\, \mu^{xy}}{x!} \mu^y =$$

$$= e^{-b\mu^y}\, b\, \mu^y \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(b\, \mu^y)^x}{x!} = b\, \mu^y.$$

Analogiquement nous obtenons

$$M_x(y) = a\, \mu^x.$$

Par conséquent les lignes de régression sont données par les équations

$$X = b\, \mu^y, \quad Y = a\, \mu^x. \tag{20}$$

2. Dans la statistique mathématique on emploie souvent la série ainsi dite de Charlier[1]). On se base sur la loi de Poisson relative à la répartition des probabilités

$$\varphi_0(x, a) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \tag{1}$$

en formant successivement les différences

$$\varphi_1(x, a) = \varphi_0(x-1, a) - \varphi_0(x, a),$$

$$\varphi_2(x, a) = \varphi_1(x-1, a) - \varphi_1(x, a),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(x, a) = \varphi_{n-1}(x-1, a)\, \varphi_{n-1} - (x, a)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Il est facile de voir que nous avons

$$\varphi_n(x, a) = \varphi_0(x, a)\; p_n(x, a),$$

où $p_n(x, a)$ est un polynôme du $n^{-\text{ème}}$ degré ayant la forme

$$p_n(x, a) = \sum_{v=0}^{n} (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v!\, a^{-v} \binom{x}{v}, \tag{2}$$

où l'expression $\binom{x}{v}$ désigne, comme on le sait,

$$\binom{x}{v} = \frac{x(-1)\dots(x-v+1)}{v!}.$$

Les polynômes $p_n(x, a)$ satisfont à la propriété orthogonale suivante:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_\mu(x, a)\, \varphi_v(x, a) = \varepsilon_{\mu v}, \tag{3}$$

où

$$\varepsilon_{\mu v} = 0, \; \mu \neq v, \; \varepsilon_{\mu\mu} = \frac{\mu!}{a^\mu}. \tag{4}$$

Supposons que $\psi(x)$ soit une fonction aléatoire de la répartition des probabilités, ou n'importe quelle autre, définie donc pour $x=0$, 1, 2... Sa série correspondante de Charlier est la suivante

$$\psi(x) \sim \varphi_0(x, a) + c_1 \varphi_1(x, a) + c_2 \varphi_2(x, a) + \dots \tag{5}$$

où les termes $c_n$ sont donnés par la formule

$$c_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} [\psi(x) - \varphi_0(x, a)]\, p_n(x, a),\; n = 1, 2, 3, \dots,$$

en supposant que les séries à droite soient convergentes. Se basant sur la propriété orthogonale, on peut écrire seulement

$$c_n = \sum_{x=0}^{\infty} \psi(x)\, p_n(x, a). \tag{6}$$

Il est évident que les termes $c_n$ peuvent être facilement exprimés au moyen des moments de la fonction $\psi(x)$ relative à la répartition des probabilités. Désignons les par $m_v$,

$$m_v = \sum_x x^v\, \psi(x), \quad m_0 = \sum_x \psi(x) = 1.$$

Nous avons

$$c_1 = a \sum_x \psi(x) \left(\frac{x}{a} - 1\right) = \sum_x x\, \psi(x) -$$

$$- a \sum_x \psi(x) = m_1 - a,$$

[1]) C. V. L. Charlier — Archiv f. Mathèm. Astron. of. Fysik,, m. 2, 1905/6, № 20.