DE LA LOI RELATIVE AUX PETITS NOMBRES ET DE LA SÉRIE DE CHARLIER DANS LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

Dr. N. OBRECHKOFF
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE SOFIA

Dans cet article je m'occupe de la loi relative aux petits nombres de Poisson. Notamment, supposons que x soit une variable qui peut prendre les valeurs 0, 2, 3,... La loi relative aux probabilités de Poisson est donnée par la formule

$$p(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a},$$

où a est une constante et p(x) désigne la probabilité pour que la variable prenne la valeur x. Par la manière de déduction elle-même, la formule de Poisson donne une bonne approximation pour des phénomènes plus rares, d'où vient également la désignation de la loi en question.

D'abord, je donne une extension de la formule ci-dessus dans le cas de deux variables réunies corrélativement et satisfaisant séparément à la loi de Poisson. J'établis le théorème suivant: que les variables x, y prennent les valeurs 0, 1, 2, 3,..., de sorte que, en présence d'une valeur quelconque fixée de l'une des variables, l'autre se soumet à la répartition de Poisson. Alors la probabilité P(x, y) pour que l'une des variables prenne la valeur x et l'autre—la valeur y, est donnée par

$$P(x, y) = C \frac{a^y b^x}{x!\, y!} \mu^{xy},$$

où $0 < \mu < 1$, a, b, C sont trois constantes entre lesquelles il y a deux relations que nous allons indiquer dans cet exposé.

Dans le paragraphe 2 j'établis de nouvelles propriétés de la série de Charlier fréquemment applicable dans la statistique, tandis que dans le paragraphe 3 je donne une extension de la formule de Poisson.

1. Considérons la variable x qui prend les valeurs 0, 1, 2, 3,..., avec des probabilités correspondantes. La loi de Poisson relative à la répartition des probabilités s'exprime par la formule

$$(1) \qquad p(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \quad a > 0,$$

où p(x) est la probabilité pour que la variable prenne la valeur x. Examinons à présent deux variables x et y qui peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2,... Supposons d'abord que les variables soient indépendantes l'une de l'autre, c'est-à-dire la probabilité $p_1(y_1)$ pour que y prenne la valeur y_1 ne dépend pas de la valeur prise par x. Si outre x, la variable y se soumet, elle—aussi, à la loi de Poisson relative aux probabilités, la probabilité P (x, y) pour les deux variables, d'après le théorème de la probabilité composée, sera égale à

$$(2) \qquad P(x, y) = \frac{a^x b^y}{x!\, y!} e^{-(a+b)},$$

où $\frac{b^y}{y!} e^{-b}$ est la loi relative à y.

Examinons à présent des collectifs dépendant de deux variables qui peuvent prendre les valeurs 0, 1, 2, ..., mais qui dépendent l'un de l'autre, c'est-à-dire pour différentes valeurs de l'une des variables, la loi de l'autre variable doit changer. Nous trouverons la loi relative aux probabilités des deux variables en supposant que, la valeur de l'une des variables ayant été fixée, l'autre se soumette toujours à la loi relative aut petits nombres. Que f(x) désigne la probabilité à priori pour x et que $\varphi(y)$ soit celle pour y. Supposons alors que $F_1(x_1, y_1)$ soit la probabilité pour que y prenne la valeur y lorsque $x = x_1$, et que $\Phi_1(x_1, y_1)$ soit la probabilité pour que x prenne la valeur x_1, lorsque $y = y_1$. Par le théorème de la probabilité composée nous aurons

$$(3) \qquad f(x) F_1(x, y) = \varphi(y)\ \Phi_1(x, y)$$

pour toutes les valeurs de x et y. Par (3) nous avons

$$\log f(x) + \log F_1(x, y) = \log \varphi(y) + \log \Phi_1(x, y),$$

en y introduisant les désignations

$$\log f(x) = f_1(x), \ \log \varphi(y) = \varphi_1(y),$$
$$\log F_1(x, y) = F(x, y), \ \log \Phi_1(x, y) = \Phi(x, y),$$

nous obtenons

$$(4) \qquad f_1(x) + F(x, y) = \varphi_1(y) + \Phi(x, y).$$

Désignons maintenant par $\underset{x}{\triangle} g(x, y)$ l'opération

$$\underset{x}{\triangle} g(x, y) = g(x+1, y) - g(x, y).$$

Il est évident que si g ne dépend pas de x, on a $\underset{x}{\triangle} g = 0$. En appliquant alors aux deux parties de l'équation (4) les opérations $\underset{x}{\triangle}$ et $\underset{y}{\triangle}$, on obtient

$$\underset{x}{\triangle} f_1(x) + \underset{x}{\triangle} F(x, y) = \underset{x}{\triangle} \Phi(x, y)$$

$$(5) \qquad \underset{x,y}{\triangle^2} F(x, y) = \underset{x,y}{\triangle^2} \Phi(x, y).$$