Като дѣлимъ числителя и знаменателя на (4) съ $(k+l)^{n-1}$ получаваме

$$(6) \qquad P_{n,m} = \binom{n}{m} \frac{p(p+\lambda)\ldots[p+(m-1)\lambda]\, q}{(1+\lambda)\,(1+2\lambda)\ldots} \cdot \frac{[q+(n-m-1)\lambda]}{[1+(n-1)\lambda]}.$$

Нека означимъ съ

$$(7) \qquad np = a,\ p = \frac{a}{n},\ q = 1-\frac{a}{n},\ \frac{a}{k} = g$$

то имаме

$$(8) \qquad \lambda = \frac{a}{nk} = \frac{g}{n}.$$

Ще намѣримъ границата на $P_{n,m}$ като предполагаме, че $a$, $g$, $m$ оставатъ фиксирани а $n$ расте неограничено. Тогава отъ (8) е ясно, че $\lambda$ ще клони къмъ нула. Да намѣримъ отначало границата на израза

$$i_n = \binom{n}{m} p(p+\lambda)\ldots[p+(m-1)\lambda].$$

Имаме за него

$$i_n = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\cdot\frac{a}{n}\cdot\frac{a+g}{n}\ldots\frac{a+(m-1)g}{n}$$

$$= \frac{a(a+g)\ldots[a+(m-1)g]}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Следователно

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} i_n = \frac{a(a+g)\ldots[a+(m-1)g]}{m!}$$

Остава да се разгледа израза

$$v_n = \frac{(q+\lambda)\,(q+2\lambda)\ldots[q+(n-1)\lambda]}{(1+\lambda)\,(1+2\lambda)\ldots[1+(n-1)\lambda]},$$

въ който, като замѣстимъ

$$q = 1-\frac{a}{n},\ \lambda = \frac{g}{n},$$

получаваме

$$(10) \qquad v_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1-\frac{a}{n}+i\frac{g}{n}}{1+i\frac{g}{n}} = \prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{\frac{a}{n}}{1+i\frac{g}{n}}\right).$$

Ние за улеснение ще разгледаме израза

$$u_n = -\log v_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \log\left(1-\frac{a}{n+ig}\right).$$

Нека съ $\varphi(x)$ да означимъ функцията

$$\varphi(x) = -\log\left(1-\frac{a}{n+gx}\right),$$

то $u_n$ има формата

$$u_n = \varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n-1).$$

При $n \geqq a$ функцията $\varphi(x)$ е положителна за $x \geqq 0$. Понеже

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{1-\frac{a}{n+gx}}\,\frac{ag}{(n+gx)^2} < 0,$$

то $\varphi(x)$ е намаляваща функция. Следователно имаме

$$\int_1^2 \varphi(x)\,dx < \varphi(1) < \int_0^1 \varphi(x)\,dx,$$

$$\int_2^3 \varphi(x)\,dx < \varphi(2) < \int_1^2 \varphi(x)\,dx,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_{n-1}^{n} \varphi(x)\,dx < \varphi(n-1) < \int_{n-2}^{n-1} \varphi(x)\,dx,$$

отдето съ събиране получаваме

$$\int_1^n \varphi(x)\,dx < u_n < \int_0^{n-1} \varphi(x)\,dx.$$

Понеже при фиксирано и крайно $x$ функцията $\varphi(x)$ клони къмъ нула, когато $n$ расте неограничено, то отъ горното лесно следва, че разликата

$$i_n = u_n - \int_0^n \varphi(x)\,dx$$

клони къмъ нула.

Следователно трѣбва да се намѣри границата на

$$\int_0^n \varphi(x)\,dx = -\int_0^n \log\left(1-\frac{a}{n+gx}\right)dx =$$

$$= -x\log\left(1-\frac{a}{n+gx}\right)\Big|_0^n +$$

$$+ag\int_0^n \frac{dx}{(n+gx)\,(n-a+gx)} =$$

$$= -n\log\left(1-\frac{a}{n+gn}\right) + \int_0^n \frac{g\,dx}{n-a+gx} -$$

$$-\int_0^n \frac{g\,dx}{n+gx} = -n\log\left(1-\frac{a}{n+ng}\right)+$$

$$+\log\frac{n-a+gx}{n+gx}\Big|_0^n = -n\log\left(1-\frac{a}{n+ng}\right)+$$

$$+\log\frac{n-a+gn}{(1+g)\,(n-a)}.$$

Първото събираемо клони къмъ $\frac{a}{1+g}$, а второто клони къмъ нула. Имаме следователно

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{a}{1+g},$$

отгдето получаваме

$$\lim_{n\to\infty} v_n = e^{-\frac{a}{1+g}}.$$

Понеже $q = 1-\frac{a}{n}$ клони къмъ 1, то така получаваме, че границата на $P_{n,m}$ е равна

$$(11) \qquad \psi(m) = \frac{a(a+g)\ldots[a+(m-1)g)}{m!}\, e^{-\frac{a}{1+g}},$$

което представлява асимптотична формула за вѣроятностьта. Като поставимъ $g=0$ получаваме въ частенъ случай формулата на Pois-