Съ сравняване на коефициентитѣ на z^n въ двете части на това уравнение получаваме предложението:

Полиномитѣ $p_n(x, a)$ *удовлетворяватъ рекурентното уравнение*

(12) $ap_{n+1}(x,a)=(x-a-n)p_n(x,a)-np_{n-1}(x,a).$
Отъ тази зависимость ще изведемъ едно свойство за нулитѣ на полиномитѣ $p_n(x,a)$, като се основаваме на една теорема на Sturm отъ алгебрата. Тази теорема гласи така:

Нека $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ сѫ една редица отъ полиноми съ степени съответно равни на индекситѣ имъ, между които имаме релациитѣ.

$$P_m(x)=(\alpha_m x+\beta_m)P_{m-}(x)-\gamma_m P_{m-2}(x), \qquad m=2, 3\ldots, n,$$

дето числата $P_0(x)$, α_m, β_m сѫ реални, като α_m, γ_m сѫ и реални и положителни. Ако редицата полиноми има само вариации на знацитѣ за $x=a$ и само перманенции при $x=b$, $(b>a)$ то уравненията

$$P_m(x)=0, \; m=2, 3, \ldots, n,$$

иматъ всичкитѣ си корени реални и разположени въ интервала (a, b). При това коренитѣ на $P_{m+}(x)=0$ отдѣлятъ тѣзи на $P_m(x)=0$.

Отъ (12) се вижда, че полиномитѣ

$$p_0(x,a), p_1(x,a), \ldots, p_n(x,a), \; a>0,$$

за всѣко n образуватъ такава редица на Sturm. Понеже при $x=0$ имаме $p_n(0,a)=(-1)^n$ и при $x=\infty$ $p_n(\infty, a)>0$, то прилагайки горната теорема, получаваме:

Нулитѣ на полиномитѣ $p_n(x, a)$ *при* $a>0$ *сѫ всички реални и положителни. При това нулитѣ на* $p_{n-1}(x, a)$ *отдѣлятъ тѣзи на* $p_n(x, a)$.

Съ това свойство става очевидна разликата на полиномитѣ на Charlier отъ полиномитѣ на Hermite, на които нулитѣ сѫ реални, но не само положителни.

Отъ формулата (8) могатъ да се получатъ асимптотични формули за полиномитѣ $p_n(x, a)$, които ще сѫ важни при изучаване сходимостьта на реда на Charlier.

3. Въ този параграфъ ще изведемъ една друга асимптотична формула за разпредѣление на вѣроятноститѣ, която прецизира тази на Poisson. За ясность на изложението, ще покажемъ принципа на извеждането на формулата на Poisson. Нека A е просто събитие съ вѣроятность p и $\bar{A}$ е противното му събитие съ вѣроятность следователно равна на $q=1-p$. Извършваме n независими опити, като съ $P_{n,m}$ да означимъ вѣроятностьта събитието A да се сбѫдне m пѫти. Напримѣръ, събитието A да се състои въ изтегляне на една бѣла топка при теглене само на една топка отъ урна, съдържаща всичко a бѣли топки и b_1 черни, т. е.

$$p=\frac{a_1}{a_1+b_1}, \; q=\frac{b_1}{a_1+b_1}.$$

Въ този случай $P_{n,m}$ ще представлява вѣроятностьта при n тегления по една топка съ връщане да изтеглимъ m бѣли топки. Познато е, че

$$P_{n,m}=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}. \tag{1}$$

Нека допуснемъ сега, че n расте къмъ безкрайность, като математичната надежда на m, дадена съ

$$a=np \tag{2}$$

остава фиксирана. Да намѣримъ границата на $P_{n,m}$, като предполагаме, че и m е фиксирано. Имаме

$$p=\frac{a}{n}, \; q=1-\frac{a}{n},$$

така, че изразътъ (1) приема вида

$$P_{n,m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\frac{a^m}{n^n}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}$$

$$=\frac{a^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-m}.$$

Числата $1-\frac{k}{n}$, $1\leq k\leq m-1$, клонятъ къмъ 1, когато n расте неограничено, а $\left(1-\frac{a}{n}\right)^n$, както е известно, клони къмъ e^{-a}. Следователно, границата на $P_{n,m}$ е равна на

$$\frac{a^n}{m!}e^{-a}, \tag{3}$$

което е формулата на Poisson.

Отъ самото извеждане е ясно, че формулата на Poisson ще дава вѣроятностьта съ по-голѣмо приближение, когато p е доста малко, т. е. тя се отнася за редкитѣ явления. Въ такива случаи тя е по-добра отъ формулата на Laplace, която е асимптотична формула, но при която уравняването (2) не остава въ сила.

Ние ще получимъ едно обобщение на закона на Poisson, като излеземъ отъ следната задача: въ една урна има k бѣли и l черни топки, като нѣма други топки. Изтегляме по една топка, като извадената топка се връща обратно въ урната и заедно съ нея се прибавятъ ρ топки отъ сѫщия цвѣтъ на извадената топка. Търси се вѣроятностьта $P_{n,m}$ при n опити да се получатъ m бѣли топки. Търсената вѣроятность се дава съ формулата

$$P_{n,m}=\binom{n}{m}\frac{k(k+\rho)\ldots}{(k+l)} \tag{4}$$

$$\frac{[k+(m-1)\rho]\, l\,(l+\rho)\ldots[l+(n-m-1)\rho]}{(k+l+\rho)\ldots(k+l+(n-1)\rho]}.$$

Нека въведемъ означенията

$$\frac{k}{k+l}=p, \; \frac{l}{k+l}=q=1-p, \; \frac{1}{k}=\lambda. \tag{5}$$