цията $\psi(x)$ за разпредѣлението на вѣроятноститѣ. Да ги означимъ съ m_ν,

$$m_\nu = \sum_x x^\nu \psi(x), \quad m_0 = \sum_x \psi(x) = 1.$$

Имаме

$$c_1 = a\sum_x \psi(x)\left(\frac{x}{a}-1\right) = \sum_x x\psi(x) - a\sum_x \psi(x) = m_1 - a,$$

$$c_2 = \frac{a^2}{2}\sum_x \psi(x)\left[\frac{x(x-1)}{a^2} - \frac{2x}{a} + 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_x x^2\psi(x) - \frac{1}{2}\sum_x x\psi(x) - a\sum_x x\psi(x) - a\sum_x x\psi(x) + \frac{a^2}{2}\sum_x \psi(x) = \frac{1}{2}m_2 - \frac{1}{2}(1+2a)m_1 + \frac{1}{2}a^2,$$

$$c_3 = \frac{a^3}{3!}\sum_x \psi(x)\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{a^3} - 3\frac{x(x-1)}{a^2} + 3\frac{x}{a} - 1\right] = \frac{1}{6}\sum_x \psi(x)\,(x^3-3x^2+2x) -$$

$$\frac{a}{2}\sum_x \psi(x)(x^2-x) + \frac{a^2}{2}\sum_x \psi(x)x - \frac{a^3}{6}\sum_x \psi(x) =$$

$$= \frac{1}{6}(m_3 - 3m_2 + 2m_1) - \frac{a}{2}(m_2 - m_1) + \frac{a^2}{2}m_1 - \frac{a^3}{6} = \frac{1}{6}m_3 - \frac{1}{2}(1+a)m_2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+\frac{a^2}{2}\right)m_1 - \frac{a^3}{6},$$

. . . .

Въ една работа G. Doetsch[2]) установява нѣкои нови равенства за полиномитѣ $p_n(x, a)$ на Charlier. Въ тази работа давамъ други характерни свойства на тѣзи полиноми, които иматъ значение при третиране въпроса за сходимостьта на реда на Charlier и ни показватъ естествения произходъ на въпроснитѣ полиноми.

Нека напишемъ полиномитѣ $p_n(x, a)$, дадени съ формулата (2), въ следната форма

$$(7)\qquad p_n(x,a) = \frac{n!}{a^n}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\frac{a^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\binom{x}{\nu} = \frac{n!}{a^n}P_n(x).$$

Имаме развитията

$$(1+z)^x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{x}{\nu}z^\nu,$$

$$e^{-az} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-a)^n z^n}{n!}.$$

Първото е абсолютно сходящо за $|z| < 1$, а второто за всѣко крайно z и a. Съ умножение на тѣзи развития, получаваме

$$(1+z)^x e^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n z^n,$$

дето имаме

$$\lambda_n = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\binom{x}{\nu} = P_n(x).$$

Понеже отъ (7) имаме

$$P_n(x) = \frac{a^n}{n!}p_n(x, a),$$

то така *получаваме основното развитие*

$$(8)\qquad (1+z)^x e^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x,a).$$

Съ това се вижда, че полиномитѣ на Charlier спадатъ къмъ една обща класа отъ полиноми, получени отъ развитие на една функция на две промѣнливи $f(x, z)$ по степенитѣ на z, като коефициентитѣ на z^n сж въпроснитѣ полиноми. Специални случаи отъ такива класи сж разглеждани често въ науката. Ето защо релацията (8) ще ни спомогне много за установяване на различни свойства на полиномитѣ $p_n(x, a)$, което именно ще направимъ.

Нека въ (8) поставимъ $(x+1)$ вмѣсто x имаме

$$(9)\qquad (1+z)^{x+1} e^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x+1,a).$$

Изваждаме (8) отъ (9) и получаваме

$$(10)\qquad z(1+z)^x e^{-az} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^z}{n!}[p_n(x+1,a) - p_n(x,a)].$$

Понеже $p_0(x,a)=1$, то тази релация може да се пише така:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1} z^n}{(n-1)}p_{n-1}(x,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}[p_n(x+1,a) - p_n(x,a)]$$

отдето, съ сравняване на коефициентитѣ на z въ двето части, имаме

$$p_n(x+1,a) - p_n(x,a) = \frac{n}{a}p_{n-1}(x,a).$$

Следователно имаме теоремата:

Полиномитѣ на Charlier удовлетворяватъ уравнението

$$(11)\qquad p_n(x+1,a) - p_n(x,a) = \frac{n}{a}p_{n-1}(x,a).$$

Нека диференцираме сега (1) спрямо z, получаваме

$$x(1+z)^{x-1}e^{-az} - a(1+z)^x e^{-az} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x,a),$$

отдето съ умножение на $(1+z)$ имаме

$$x(1+z)^x e^{-az} - a(1+z)^{x+1}e^{-az} = (1+z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x,a),$$

т. е.

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x,a) - a(1+z)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n z^n}{n!}p_n(x,a) = (1+z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n z^{n-1}}{(n-1)!}p_n(x,a).$$

---

[2]) G. Doetsch — Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charlierschen Polynome und damit zusammenhängende Differential differenzen Gleichung, Mathematische Annalen, 109 (1933), стр. 257—266.