като редоветѣ трѣбва да бѫдатъ сходящи. Отношенията на $(x+2)$-ия членъ къмъ $(x+1)$-вия въ двата реда е съответно равно на

$$\frac{b^{x+1}\, e^{a\mu^{x+1}}}{(x+1)!} : \frac{b^x\, e^{a\mu^x}}{x!} = \frac{b}{x+1}\, e^{a\mu^x(\mu-1)}$$

$$\frac{a^{y+1}\, e^{a\mu^{x+1}}}{(y+1)!} : \frac{a^y\, e^{a\mu^y}}{y!} = \frac{a}{y+1}\, e^{b\mu^y(\mu-1)}$$

и очевидно клони къмъ ∞ при $\mu > 1$ и къмъ нула при $\mu \leq 1$. Следователно числото μ е най-много равно на 1. Уравненията (17) могатъ да се пишатъ съ въведеното означение така:

$$C\, g(a,b) = 1, \quad C\, g(b,a) = 1,$$

отдето имаме за C,

$$(18) \qquad C = \frac{1}{g(a,b)} = \frac{1}{g(b,a)}.$$

Отъ горното следва, че константитѣ a, b *сѫ свързани съ релацията* $g(a,b) = g(b,a)$. *Вѣроятноститѣ a priori се даватъ съ формулитѣ*

$$(19) \quad f(x) = \frac{1}{g(a,b)}\, \frac{b^x}{x!}\, e^{a\mu^x}, \quad \varphi(y) = \frac{1}{g(a,b)}\, \frac{a^y}{y!}\, e^{b\mu^y},$$

дето имаме за μ, $0 < \mu \leq 1$.

Отъ горнитѣ извеждания е ясно, че само тогава x и y сѫ независими помежду си, ако $\mu = 1$.

Нека $P(x, y)$ е вѣроятностьта промѣнливитѣ да вематъ съответно стойноститѣ x и y. Тогава имаме

$$P(x,y) = f(x)\, F_1(x,y) = C\, \frac{b^x}{x!}\, e^{a\mu^x} \frac{a^y \mu^{xy}}{y!}\, e^{-a\mu^x} = C\, \frac{a^y b^x \mu^{xy}}{x!\, y!}.$$

Следователно получаваме основната теорема:

Нека промѣнливитѣ x, y *могатъ да вематъ стойноститѣ* $0, 1, 2, 3, \ldots$, *но така сѫ свързани корелативно, че при фиксиране стойностьта на едно кое да е отъ тѣхъ, другото промѣнливо да се подчинява на закона на Poisson за разпредѣлението на вѣроятноститѣ. Тогава законътъ* $P(x,y)$ *за общото разпредѣление на вѣроятноститѣ се дава съ*

$$P(x,y) = C\, \frac{a^y\, b^x\, \mu^{xy}}{x!\, y!},$$

дето a, b, μ, C *сѫ положителни константи,* $\mu \leq 1$, *между които имаме връзкитѣ*

$$g(a,b) = g(b,a), \quad C\, g(a,b) = 1.$$

Нека съ $M_y(x)$ да означимъ математичната надежда на x при фиксирано y, а съ $M_x(y)$ означаваме математичната надежда на y при фиксирано x. Имаме

$$M_y(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{b^x \mu^{xy}}{(x-1)!} e^{-b\mu^y} = e^{-b\mu^y}\, b \sum_{x=0}^{\infty} \frac{b^x \mu^{xy}}{x!}\, \mu^y =$$

$$= e^{-b\mu^y}\, b\, \mu^y \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(b\mu^y)^x}{x!} = b\, \mu^y.$$

Аналогично получаваме

$$M_x(y) = a\, \mu^x.$$

Следователно линиитѣ на регресия се даватъ съ уравненията

$$(20) \qquad X = b\, \mu^y, \quad Y = a\, \mu^x.$$

2. Въ математическата статистика се често употрѣбява тъй наречения редъ на Charlier. Изхождаме отъ закона за разпредѣлението на вѣроятноститѣ на Poisson,

$$(1) \qquad \varphi_0(x,a) = \frac{a^x}{x!}\, e^{-a},$$

като се образуватъ последователно разликитѣ

$$\varphi_1(x,a) = \varphi_0(x-1,a) - \varphi_0(x,a),$$
$$\varphi_2(x,a) = \varphi_1(x-1,a) - \varphi_1(x,a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(x,a) = \varphi_{n-1}(x-1,a) - \varphi_{n-1}(x,a)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Лесно се вижда, че имаме

$$\varphi_n(x,a) = \varphi_0(x,a)\, p_n(x,a),$$

дето $p_n(x,a)$ е полиномъ отъ степень n, имащъ формата

$$(2) \qquad p_n(x,a) = \sum_{v=0}^{n} (-1)^{n-v} \binom{n}{v} v!\, a^{-v} \binom{x}{v},$$

дето изразътъ $\binom{x}{v}$ означава, както е известно,

$$\binom{x}{v} = \frac{x(x-1)\ldots(x-v+1)}{v!}.$$

Полиномитѣ $p_n(x, a)$ удовлетворяватъ следното ортогонално свойство

$$(3) \qquad \sum_{x=0}^{\infty} p_\mu(x,a)\, \varphi_v(x,a) = \varepsilon_{\mu v},$$

дето

$$(4) \qquad \varepsilon_{\mu v} = 0,\ \mu \neq v, \quad \varepsilon_{\mu\mu} = \frac{\mu!}{a^\mu}.$$

Нека $\psi(x)$ е една произволна функция за разпредѣлението на вѣроятноститѣ, или коя да е друга, дефинирана значи за $x = 0, 1, 2, \ldots$ Съответниятъ ѝ редъ на Charlier е следния

$$(5) \quad \psi(x) \sim \varphi_0(x,a) + c_1\, \varphi_1(x,a) + c_2\, \varphi_2(x,a) + \ldots$$

дето числата c_n се даватъ съ формулата

$$c_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} [\psi(x) - \varphi_0(x,a)]\, p_n(x,a),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

предполагайки редоветѣ въ дѣсно сходящи. На основание на ортогоналното свойство (3) можемъ да пишемъ само

$$(6) \qquad c_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} \psi(x)\, p_n(x,a).$$

Числата c_n могатъ очевидно лесно да се изразятъ посрѣдствомъ моментитѣ на функ-

[1]) C. V. L. Charlier — Archiv f. Mathem. Astron. of. Fysik, m. 2, 1905/6, № 20.