По условие имаме

$$F_1(x,y)=\frac{[a(x)]^y}{y!}e^{-a(x)}, \tag{6}$$

понеже законътъ за разпредѣлението на вѣроятноститѣ трѣбва да бѫде този на Poisson, като математичната надежда (константата въ формулата) ще зависи въобще отъ другото промѣнливо x. Въ частность, ако $a(x)$ не зависи отъ x, ще имаме независими промѣнливи и въпросътъ се решава съ (2). Аналогично по предположение имаме

$$\Phi_1(x,y)=\frac{[b(y)]^x}{x!}e^{-b(y)}. \tag{7}$$

Отъ (6) и (7) съ логаритмуване получаваме

$$F(x,y)=\log F_1(x,y)=y\log a(x)-a(x)-\log(y!),$$

$$\Phi(x,y)=\log\Phi_1(x,y)=x\log b(y)-b(y)-\log(x!).$$

Отъ горнитѣ уравнения получаваме лесно

$$\underset{x}{\Delta}F(x,y)=y\underset{x}{\Delta}\log a(x)-\underset{x}{\Delta}a(x),$$

$$\underset{y}{\Delta}\Phi(x,y)=x\underset{y}{\Delta}\log b(y)-\underset{y}{\Delta}b(y),$$

$$\underset{x,y}{\Delta^2}F(x,y)=\underset{x}{\Delta}\log a(x)=\log\frac{a(x+1)}{a(x)},$$

$$\underset{x,y}{\Delta^2}\Phi(x,y)=\underset{y}{\Delta}\log b(y)=\log\frac{b(y+1)}{b(y)}.$$

Като поставимъ полученитѣ стойности за $\underset{x,y}{\Delta^2}F(x,y)$, $\underset{x,y}{\Delta^2}\Phi(x,y)$ въ (5) и антилогаритмуваме, намираме

$$\frac{a(x+1)}{a(x)}=\frac{b(y+1)}{b(y)}, \tag{8}$$

което уравнение трѣбва да се удовлетворява за всички x и y. Това ни показва, че ще имаме

$$\frac{a(x+1)}{a(x)}=\mu,\qquad \frac{b(y+1)}{b(y)}=\mu, \tag{9}$$

дето μ е константа, независима отъ x и y. Нека означимъ $a(0)$ съ a и $b(0)$ съ b. Отъ първото уравнение (9) имаме при поставяне вмѣсто x стойноститѣ $0, 1, 2, \ldots, x-1$,

$$\begin{aligned} a(1)&=\mu a,\\ a(2)&=\mu a(1),\\ a(3)&=\mu a(2),\\ &\ldots\ldots\\ a(x)&=\mu a(x-1),\end{aligned}$$

отдето, съ умножение, получаваме

$$a(x)=a\mu^x. \tag{10}$$

Аналогично отъ второто имаме

$$b(y)=b\mu^y. \tag{11}$$

Очевидно числата a, b, μ сѫ положителни.

Отъ формулитѣ (6), (7), (10), (11) се вижда, че $F_1(x,y)$ и $\Phi_1(x,y)$ ще иматъ формата

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x,y)&=\frac{a^y\mu^{xy}}{y!}e^{-a\mu^x}\\ \Phi_1(x,y)&=\frac{b^x\mu^{xy}}{x!}e^{-b\mu^y}\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Първата ни дава закона за вѣроятноститѣ на y *при фиксирано* x, *а втората ни дава закона за вѣроятноститѣ на* x *при фиксирано* y.

Лесно се провѣрява, че

$$\sum_{y=0}^{\infty}F_1(x,y)=1,\quad \sum_{x=0}^{\infty}\Phi_1(x,y)=1, \tag{13}$$

както трѣбва да бѫде. Действително имаме

$$\sum_{y=0}^{\infty}F_1(x,y)=e^{-a\mu^x}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{a^y\mu^{xy}}{y!}=e^{-a\mu^x}e^{a\mu^x}=1.$$

Аналогично имаме за второто равенство (13).

Отъ (3) и (12) получаваме

$$f(x)\frac{a^y\mu^{xy}}{y!}e^{-a\mu^x}=\varphi(y)\frac{b^x\mu^{xy}}{x!}e^{-b\mu^y}$$

отдето имаме

$$\frac{f(x)}{\dfrac{b^x e^{a\mu^x}}{x!}}=\frac{\varphi(y)}{\dfrac{a^y e^{b\mu^y}}{y!}},$$

което равенство ни показва, че

$$\left\{\begin{aligned} f(x)&=C\frac{b^x e^{a\mu^x}}{x!}\\ \varphi(y)&=C\frac{a^y e^{b\mu^y}}{y!},\end{aligned}\right. \tag{14}$$

дето C е константа, независима отъ x и y. Константата C подлежи на опредѣляне. Понеже $f(x)$ и $\varphi(y)$ сѫ закони за вѣроятности на промѣнливи, вземащи само стойноститѣ $0, 1, 2, 3, \ldots$, то трѣбва да имаме

$$\sum_{x=0}^{\infty}f(x)=1,\qquad \sum_{y=0}^{\infty}\varphi(y)=1. \tag{15}$$

Да означимъ тогава съ $g(u,v)$ функцията на двѣтѣ промѣнливи u, v,

$$g(u,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!}e^{uv^n}. \tag{16}$$

Отъ формулитѣ (14) уравненията (15) се свеждатъ на

$$\left\{\begin{aligned} C\sum_{x=0}^{\infty}\frac{b^x}{x!}e^{a\mu^x}&=1,\\ C\sum_{y=0}^{\infty}\frac{a^y}{y!}e^{b\mu^y}&=1,\end{aligned}\right. \tag{17}$$