Le coefficient $k_{0\cdot 1234 \ldots n}$ s'appelle le *coefficient à priori de l'aliénation* *).

D'autre part, quand $E(e_i \bar{x}_i) = 0$, nous obtenous de l'égalité [35]:

$$\sigma_0^2 = \bar{\sigma}^2 + \sigma_e^2 \text{ ou } \bar{\sigma}^2 = \sigma_0^2 - \sigma_e^2$$

La formule [43] donne alors:

$$r_{0\cdot 1234 \ldots n} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_0} \qquad [46]$$

La comparaison de cette formule avec la formule [40] nous convainc, en realité, quand e_i est indépendant de $\bar{x}_i$, que le coefficient multiple à priori de la corrélation est exactement égal à la mesure H, ce à quoi on devait s'attendre.

Les formules obtenues permettent de trouver une expression plus simple pour $r_{0\cdot 1234 \ldots n}$. En multipliant [32], terme par terme, avec $x_i^{(0)}$, en passant ensuite aux espérances mathématiques et en prenant en considération [20] et [36^a], on trouve aisément:

$$E x_i^{(0)} \bar{x}_i = \sigma_0^2 (\beta_{01} r_{01} + \beta_{02} r_{02} + \beta_{03} r_{03} + \ldots + \beta_{0n} r_{0n})$$

Pour obtenir $r_{0\cdot 123 \ldots n}$, il faut diviser cette expression par $\sigma_0 \bar{\sigma}$, c.-à.-d.:

$$r_{0\cdot 123 \ldots n} = \frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}} (\beta_{01} r_{01} + \beta_{02} r_{02} + \beta_{03} r_{03} + \ldots + \beta_{0n} r_{0n}).$$

Mais nous venons de voir, quand $\bar{x}_i$ est *indépendant de* e_i, que

$$\frac{\sigma_0}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{r_{0\cdot 123 \ldots n}}$$

Par conséquent:

$$r_{0\cdot 123 \ldots n}^2 = \beta_{01} r_{01} + \beta_{02} r_{02} + \beta_{03} r_{03} + \ldots + \beta_{0n} r_{0n} \qquad [47]$$

ou bien

$$r_{0\cdot 1234 \ldots n} = \sqrt{\beta_{01} r_{01} + \beta_{02} r_{02} + \beta_{03} r_{03} + \ldots + \beta_{0n} r_{0n}} \qquad [48]$$

La formule [48] est intéressante, en premier lieu, par ce que sa partie droite est racine carrée du numérateur de la formule plus générale [39]. D'ailleurs, la formule [47] nous permet d'établir avec plus de précision comment le coefficient multiple de corrélation est construit par les coefficients des différentes séries du système [14] et jusqu'à quelle mesure il change quand on l'introduit dans telle ou telle série. *Watkins* donne aux produits du type $\beta_{0j} r_{0j}$ le nom de „coefficient of net determination" (coefficient de la détermination nette) et à la grandeur $r_{0\cdot 123 \ldots n}^2$ — le nom de „coefficient of total détermination" (coefficient de la détermination brute).

Il est très curieux de constater que dans le cas de corrélation entre trois séries, les formules [39], [42] et [48], qui ont différents degrés de communauté et qui, comme nous l'avons vu, ne sont pas déduites des mêmes principes, amènent toutefois à des résultats identiques.

Vraiment, pour le cas de trois séries, $X_i^{(0)}$, $X_2^{(1)}$, $X_i^{(2)}$, nous obtenons de la formule [39]:

$$r_{0\cdot 12} = \frac{\beta_{01\cdot 2} r_{01} + \beta_{02\cdot 1} r_{02}}{\sqrt{\beta_{01\cdot 2}^2 + \beta_{02\cdot 1}^2 + 2\beta_{01\cdot 2}\beta_{02\cdot 1} r_{12}}};$$

de la formule [42]:

$$H = \sqrt{\beta_{01\cdot 2}^2 + \beta_{02\cdot 1}^2 + 2\beta_{01\cdot 2}\beta_{02\cdot 1} r_{12}}$$

et enfin de la formule [48]:

$$r_{0\cdot 12} = \sqrt{\beta_{01\cdot 2} r_{01} + \beta_{02\cdot 1} r_{02}}$$

A l'aide de [22] toutes ces trois formules se réduisent à la même expression:

$$r_{0\cdot 12} = \sqrt{\frac{r_{01}^2 + r_{02}^2 - 2 r_{01} r_{02} r_{12}}{1 - r_{12}^2}} \qquad [49]$$

Lorsque le nombre des séries du système [14] est supérieur à 3, cette coïncidence n'aura plus lieu. Il paraît toutefois que, dans ce cas aussi, les résultats de toutes les trois formules ne diffèrent pas trop.

Nous avons fait ressortir plus haut que notre système de formules opère toujours avec des grandeurs à priori. Le coefficient de la corrélation multiple est également un coefficient à priori. Si l'on veut trouver sa valeur empirique, approchée, il est évident qu'il sera nécessaire de remplacer tous les coefficients à priori de la corrélation du type r_{ik} (dont sont formés également les coefficients du type β figurant dans [23]) par leurs valeurs approchées, calculées d'après la formule [1].

Si nous désirons, comme cela a lieu fréquemment en pratique, lors de l'application de la méthode de la corrélation multiple, trouver l'approximation empirique pour $\bar{x}_i$ qui, de son côté, n'est qu'une valeur approchée de $x_i^{(0)}$, nous devons remplacer dans la formule [34] les écarts des espérances mathématiques par les écarts des moyennes arithmétiques correspondates. Si nous désignons la moyenne arithmétique de la série № 0 par M_0, celle da la serie № 1 par M_1 et, en général, celle de la série j par M_j, et les approximations empiriques des coefficients de la régression du type b_{ik} par le symbole b'_{ik}, nous obtenons, au lieu de la formule [34], celle qui suit:

$$\bar{X}_i - M_0 = b'_{01} (X_i^{(1)} - M_1) + b'_{02} (X_i^{(2)} - M_2) + \ldots + b'_{0n} (X_i^{(n)} - M_n)$$

ou bien

$$\bar{X}_i = b'_{01} X_i^{(1)} + b'_{02} X_i^{(2)} + b'_{03} X_i^{(3)} + \ldots + b'_{0n} X_i^{(n)} + [M_0 - b'_{01} M_1 - b'_{02} M_2 - b'_{03} M_3 - \ldots - b'_{0n} M_n] \qquad [50]$$

En conclusion, nous allons examiner deux exemples.

Premier exemple. Nous avons examiné, à la page 288 et suivantes, un cas simple, où la construction des séries $X_i^{(0)}$, $X_i^{(1)}$ et $X_i^{(2)}$ est un

*) A la page 135 de mon ouvrage „Korrelationsrechnung" j'ai admis $E(e_i x_i^{(0)}) = 0$, au lieu de $E(e_i \bar{x}_i) = 0$, et j'ai obtenu par conséquent une formule de la liaison entre $r_{0\cdot 1234 \ldots n}$ et $k_{0\cdot 1234 \ldots n}$ un peu différente. Je profite de l'occasion pour corriger cette erreur qui, d'ailleurs, n'a eu aucune répercussion sur les autres déductions de mon ouvrage.