vantes), nous remarquons que $\bar{x}_i$ joue le rôle de x, et $x_i^{(0)}$ — le rôle de y; que ξ_0 coïncide avec $\bar{x}_i$ et le coefficient b est, dans notre cas, égal à 1.

Appelons le coefficient de corrélation de $x_i^{(0)}$ avec $\bar{x}_i$ *le coefficient multiple à priori de la corrélation* et désignons-le par le symbole $r_{0\cdot1234\,\ldots\,n}$.

$x_i^{(0)}$ et $\bar{x}_i$ étant des écarts de leurs espérances mathématiques, on peut écrire:

$$\left.\begin{aligned} r_{0\cdot1234\ldots n} &= \frac{E\{x_i^{(0)}(x_i^{(0)}-e)_i\}}{\sqrt{E\{x_i^{(0)}\}^2 \cdot E\{x_i^{(0)}-e_i\}^2}} = \\ &= \frac{\sigma_0^2 - E\,(x_i^{(0)}\,e_i)}{\sqrt{\sigma_0^2\,[\sigma_0^2+\sigma_e^2-2\,E\,(x_i^{(0)}\,e_i)]}} \end{aligned}\right\} \quad [36]$$

où σ_e désigne l'écart-type de la grandeur e.

En multipliant l'égalite [24], terme par terme, avec $x_i^{(0)}$ et en passant aux espérances mathématiques, nous voyons que

$$E\,x_i^{(j)}\,x_i^{(k)} = \sigma_j\,\sigma_k\,r_{kj} \qquad [36^a]$$

Pour tous les j et k entiers et positifs, en outre du cas $j = k$, nous trouvons:

$$E\,(x_i^{(0)}\,e_i) = \sigma_0^2\,(1-\beta_{01}\,r_{01}-\beta_{02}\,r_{02}-\beta_{03}\,r_{03}\ldots\ldots - \beta_{0n}\,r_{0n}) \qquad (37)$$

De la même manière, en ne laissant dans la partie droite de l'équation [24] que e_i, en reportant les autres termes dans la partie gauche, en élevant les deux parties au carré et en passant aux espérances mathématiques, nous trouvons:

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 = \sigma_0^2\,(1&+\beta_{01}^2+\beta_{02}^2+\ldots+\beta_{0n}^2-2\,\beta_{01}\,r_{01}- \\ &-2\,\beta_{02}\,r_{02}-\ldots-2\,\beta_{0n}\,r_{0n}+2\,\beta_{01}\,\beta_{02}\,r_{12}+2\,\beta_{01}\,\beta_{03}\,r_{13}+ \\ &+\ldots+2\,\beta_{01}\,\beta_{0n}\,r_{1n}+\ldots+2\,\beta_{0(n-1)}\,\beta_{0n}\,r_{(n-1)n})\end{aligned} \qquad [38]$$

L'équation [36] prend, après quelques éliminations, la forme définitive suivante:

$$r_{0\cdot123\ldots n} = \frac{\beta_{01}\,r_{01}+\beta_{02}\,r_{02}+\beta_{03}\,r_{03}+\ldots+\beta_{0n}\,r_{0n}}{\sqrt{\begin{aligned}&\beta_{01}^2+\beta_{02}^2+\beta_{03}^2+\ldots+\beta_{0n}^2+ \\ &+2\,\beta_{01}\,\beta_{02}\,r_{12}+2\,\beta_{01}\,\beta_{03}\,r_{13}+ \\ &+\ldots+2\,\beta_{01}\,\beta_{0n}\,r_{1n}+\ldots+ \\ &+2\,\beta_{0\,(n-1)}\,\beta_{0n}\,r_{(n-1)n}\end{aligned}}} \qquad [39]$$

(Faire attention sur la grande proximité du dénominateur avec la formule du carré du polynôme $\beta_{01}+\beta_{02}+\beta_{03}+\ldots+\beta_{0n}$: la différence n'est que dans le nombre des coefficients de corrélation pour les produits doubles. On conçoit facilement la loi d'après laquelle sont disposés les indices de ces coefficients).

Nous allons à présent plus loin. Conformément à ce qui est exposé dans la première partie du présent article, la mesure comparativement la plus rationnelle de l'intensité de la liaison entre deux variables est le coefficient H (voir formules 10 et 12). Puisque dans la mesure de l'intensité de la liaison entre $\bar{x}_i$ et $x_i^{(0)}$, comme nous l'avons vu plus haut, $\xi_i = \bar{x}_i$ et $\psi = x_i^{(0)}$, il en résultera que $q_1 = 1$, et nous aurons:

$$H = \frac{\sigma}{\sigma_0} \qquad [40]$$

où σ désigne l'écart-type de la grandeur $\bar{x}_i$ qui s'obtient facilement à l'aide de la formule [34] en élevant au carré les deux parties de l'égalité et en déterminant leurs espérances mathématiques:

$$\left.\begin{aligned}\sigma = \sigma_0^2\,(\beta_{01}^2&+\beta_{02}^2+\ldots+\beta_{0n}^2+2\,\beta_{01}\,\beta_{02}\,r_{12}+ \\ &+2\,\beta_{01}\,\beta_{03}\,r_{13}+\ldots\ldots+2\,\beta_{01}\,\beta_{0n}\,r_{1n}+ \\ &+\ldots\ldots+2\beta_{0\,(n-1)}\,\beta_{0n}\,r_{(n-1)\,n})\end{aligned}\right\} \quad [41]$$

En introduisant cette valeur dans la formule [40], nous obtenons:

$$H = \sqrt{\begin{aligned}&\beta_{01}^2+\beta_{02}^2+\ldots\ldots+\beta_{0n}^2+2\beta_{01}\,\beta_{02}\,r_{12} \\ &+2\,\beta_{01}\,\beta_{03}\,r_{13}+\ldots\ldots+2\,\beta_{01}\,\beta_{0n}\,r_{1n} \\ &+\ldots\ldots+2\beta_{0\,(n-1)}\,\beta_{0n}\,r_{(n-1)\,n}\end{aligned}} \qquad [42]$$

Cette formule est plus simple que la formule [39] et exactement égale à son dénominateur. Elle s'applique aussi pour le cas où e_i et $\bar{x}_i$ *ne sont pas* mutuellement indépendants (voir page 284).

Si cependant la liaison entre la série 0 et les autres séries du système [14] est vraiment linéaire, et si dans l'égalité [18] sont incluses toutes les séries influant sur la série 0, nous pouvons admettre avec raison que e_i et $\bar{x}_i$ sont mutuellement indépendants. Cette admission conduit à une simplification considérable de la formule du coefficient multiple de corrélation $r_{0\cdot1234\,\ldots\,n}$

On a dans ce cas:

$$E\,(e_i\,\bar{x}_i) = 0$$

et à l'aide de la formule [35] on obtient:

$$E\,[e_i\,(\bar{x}_i^{(0)}-e_i)] = 0$$

et ensuite:

$$E\,e_i\,\bar{x}_i^{(0)} = E\,e_i^2 = \sigma_e^2$$

Par conséquent, l'expression [36] prend la forme:

$$r_{0\cdot1234\ldots n} = \frac{\sigma_0^2-\sigma_e^2}{\sqrt{\sigma_0^2\,(\sigma_0^2+\sigma_e^2-2\,\sigma_e^2)}} = \frac{\sqrt{\sigma_0^2-\sigma_e^2}}{\sigma_0} \qquad [43]$$

Cette formule nous permet de faire deux conclusions:

D'une part, elle peut être présentée directement sous forme:

$$r_{0\cdot1234\,\ldots\,n} = \sqrt{1-\frac{\sigma_e^2}{\sigma_0^2}}$$

En posant:

$$k_{0\cdot1234\,\ldots\,n} = \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \qquad [44]$$

nous obtenons une identité que certains théoriciens considèrent, sans raison suffisante, comme base de toute la théorie de la corrélation multiple:

$$r_0^2{}_{\cdot1234\,\ldots\,n} = 1 - k_0^2{}_{\cdot1234\,\ldots\,n} \qquad [45]$$