Si l'équation [18] a la forme:

$$x_i^{(0)} = b_{01}\, x_i^{(1)} + b_{02}\, x_i^{(2)} + b_{03}\, x_i^{(3)} + e_i$$

on trouve alors les coefficients $\beta_{01\cdot23}$, $\beta_{02\cdot13}$, $\beta_{03\cdot12}$ à l'aide du système des 3 équations suivantes:

$$r_{01} - \beta_{01\cdot23} - \beta_{02\cdot13}\, r_{12} - \beta_{03\cdot12}\, r_{13} = 0$$
$$r_{02} - \beta_{01\cdot23}\, r_{12} - \beta_{02\cdot13} - \beta_{03\cdot12}\, r_{23} = 0$$
$$r_{03} - \beta_{01\cdot23}\, r_{13} - \beta_{02\cdot13}\, r_{23} - \beta_{03\cdot12} = 0, \text{ etc.}$$

On peut facilement donner la solution générale du système [21] à l'aide des déterminants. Cependant, il est plus convenable, en pratique, de calculer les coefficients β, en passant du cas de 3 variables au cas de 4 variables, du cas de 4 variables au cas de 5 variables, etc. Les formules conservent en outre la même structure: pour les séries arbitraires №№ i, k, l, m, etc., on a:

$$\beta_{ik.l} = \frac{r_{ik} - r_{il.}\, r_{lk}}{1 - r_{lk.}\, r_{lc}} \text{ (où } r_{lk} = r_{kl}) \qquad [23]$$

$$\beta_{ik.lm} = \frac{\beta_{ik.m} - \beta_{il.m}\,\beta_{lk.m}}{1 - \beta_{lk.m}\,\beta_{kl.m}} = \frac{\beta_{ik.l} - \beta_{im.l}\,\beta_{mk.l}}{1 - \beta_{mk.l}\,\beta_{km.l}}$$

(où $\beta_{lk.m}$ n'est pas égal à $\beta_{kl.m}$ et $\beta_{mk.l}$ n'est pas égal à $\beta_{km.l}$).

$\beta_{ik.lmn}$ est construit à l'aide de $\beta_{ik.lm}$ de la même manière que $\beta_{ik.lm}$ est construit à l'aide de $\beta_{ik.l}$, etc.

Dans notre exposé ultérieur nous éliminerons tous les chiffres à droite du point dans les indices de β, quand les numéros de toutes les n séries du système [14] auraient dû y entrer. Au lieu de $\beta_{01\cdot2345\ldots n}$, nous écrirons seulement β_{01}, au lieu de $\beta_{0j\cdot1234\ldots n}$ — seulement β_{0j}, etc.

L'équation [18] prend, après que l'on y a placé les valeurs de [20], la forme suivante:

$$x_i^{(0)} = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\beta_{01}\, x_i^{(1)} + \frac{\sigma_0}{\sigma_2}\beta_{02}\, x_i^{(2)} + \ldots\ldots + \frac{\sigma_0}{\sigma_n}\beta_{0n}\, x_i^{(n)} + e_i \qquad [24]$$

ou ce qui est la meme chose:

$$\frac{x_i^{(0)}}{\sigma_0} = \beta_{01}\frac{x_i^{(1)}}{\sigma_1} + \beta_{02}\frac{x_i^{(2)}}{\sigma_2} + \ldots\ldots + \beta_{0n}\frac{x_i^{(n)}}{\sigma_n} + \frac{e_i}{\sigma_0} \qquad [25]$$

Nous pouvons maintenant poser la question à savoir: comment apprécier, dans le système [14], l'intensité da la liaison entre les termes de la série № 0 d'une part, et ceux d'une autre série d'ordre j, d'autre part, autant que cette liaison peut s'établir sur la base du système d'égalités type [18], c.-à.-d. autant que *cette liaison ne dépend de la liaison entre la série d'ordre j et les autres séries, également influant sur la série № 0.*

Adoptons la formule [16]. On a

$$X_i^{(0)} = b_{01}\, X_i^{(1)} + b_{02}\, X_i^{(2)} + b_{03}\, X_i^{(3)} + \ldots + b_{0n}\, X_i^{(n)} + E_i \qquad [26]$$

La question ci-dessus peut être formulée *mathématiquement* de la manière suivante: quelles valeurs auraient pu avoir les termes de la série № 0 si tous les éléments du système [14], outre la série № j, auraient conservé leur grandeur constante au cours de toutes les N observations, c.-à.-d. si pour chaque i.

$$b_{01}\, X_i^{(1)} + b_{02}\, X_i^{(2)} + \ldots\ldots + b_{0(j-1)}\, X_i^{(j-1)} + b_{0(j+1)}\, X_i^{(j+1)} + \ldots\ldots + b_{0n}\, X_i^{(n)} = C = \text{Const.}$$

On aurait alors:

$$X_i^{(0)} = b_{0j}\, X_i^{(j)} + E_i + C$$

En déduisant de cette expression les espérances mathématiques des deux parties de l'équation et considérant que l'espérance mathématique d'une grandeur constante est égale à cette dernière, nous obtenons:

$$X_i^{(0)} - E\,X^0 = b_{0j}(X_i^{(j)} - E\,X^{(j)}) + (E_i - E\,E) + (C - C);$$

ou définitivement

$$x_i^{(0)} = b_{0j}\, x_i^{(j)} + e_i \qquad [27]$$

(Il faut prendre en considération que les écarts-type des grandeurs $x_i^{(0)}$ et e_i dans l'équation [27] ne sont pas les mêmes que ceux des grandeurs dans l'équation [18]).

D'autre part, en *raisonnant d'une manière purement mathématique,* nous pouvons tirer, dans le système [14], en première place la série № j et exprimer tous les termes de cette série comme fonctions linéaires des autres n séries. Alors, l'égalité [26] pourrait être remplacée par celle-ci:

$$X_i^{(j)} = b_{j(0)}\, X_i^{(0)} + b_{j1}\, X_i^{(1)} + b_{j2}\, X_i^{(2)} + \ldots\ldots + b_{jn}\, X_i^{(n)} + E_i'$$

En admettant que tous les X_i, outre les termes des séries №№ j et 0, restent constants pour toute la série d'observations, nous aurions obtenu, par analogie avec [27], l'équation suivante:

$$x_i^{(j)} = b_{j0}\, x_i^{(0)} + e'_i \qquad [28]$$

Comparons les égalités [27] et [28]. Les grandeurs e_i et e'_i étant pour ainsi dire des „erreurs accidentelles", $b_{0j}\, x_i^{(j)}$ représente quelque chose comme une valeur approchée de $x_i^{(0)}$ et, inversement, $b_{j0}\, x_i^{(0)}$ peut, pour la même raison, être considéré comme une valeur approchée de $x_i^{(j)}$. Par conséquent, on peut considérer les coefficients b_{0j} et b_{j0} comme coefficients réciproquement correspondants de la régression. Ci-dessus, à la page 275 nous avons établi que le coefficient de corrélation empirique peut être déduit comme une moyenne géométrique des deux coefficients empiriques réciproquement correspondants de la régression:

$$r'_{12} = \sqrt{b'_{12}\,.\,b'_{21}}$$

Par analogie, nous pouvons déterminer *le coefficient partiel à priori de la corrélation* de la série № 0 avec la série № j, comme une moyenne arithmétique des deux coefficients à priori de la régression b_{0j} et b_{j0}:

$$r_{0j\cdot123\ldots n} = \sqrt{b_{0j}\,.\,b_{j0}}$$

Et puisque d'après la formule [20],

$$b_{0j} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j}\beta_{0j\cdot1234\ldots n} \text{ et } b_{j0} = \frac{\sigma_j}{\sigma_0}\beta_{j0\cdot1234\ldots n}$$

on a définitivement:

$$r_{0j\cdot1234\ldots n} = \sqrt{\beta_{0j\cdot1234\ldots n}\,\beta_{j0\ldots n}} \qquad [29]$$