и да изразимъ всичкитѣ членове на този редъ като линейни функции отъ останалитѣ n реда. Тогава равенство [26] би се замѣнило съ следното:

$$X_i^{(j)} = b_{j0} X_i^{(0)} + b_{j1} X_i^{(1)} + b_{j2} X_i^{(2)} + \dots + b_{jn} X_i^{(n)} + E_i'.$$

Като приемемъ, че всички X_i, освенъ членоветѣ на редове №№ j и 0, оставатъ константни за цѣлата серия отъ наблюдения, ние бихме получили, по аналогия съ [27], следното равенство:

$$x_i^{(j)} = b_{j0}\, x_i^{(0)} + e_i' \qquad [28].$$

Да сравнимъ равенствата [27] и [28]. Понеже величинитѣ e_i и e'_i сѫ, тъй да се каже, „случайнитѣ грѣшки", то $b_{0j}\, x_i^{(j)}$ е нѣщо като приближено значение на $x_i^{(0)}$, и, обратно, $b_{j0}\, x_i^{(0)}$ може, съ сѫщото право, да се счита за приближено значение на $x_i^{(j)}$. Следователно, коефициентитѣ b_{0j} и b_{j0} могатъ да се разглеждатъ като взаимно-съответни коефициенти на регресията. По-рано, на стр. 254, ние установихме, че емпиричния коефициентъ на корелацията може да бѫде изведенъ като геометрична срѣдна отъ двата взаимно-съответни емпирични коефициенти на регресията:

$$r_{12}' = \sqrt{b_{12}' \cdot b_{21}'}.$$

По аналогия, ние можемъ да опредѣлимъ *априорния частиченъ коефициентъ на корелацията* между редоветѣ № 0 и № j като срѣдно-геометрично отъ двата априорни коефициенти на регресията b_{0j} и b_{j0}:

$$r_{0j \cdot 123 \dots n} = \sqrt{b_{0j} \cdot b_{j0}}$$

А понеже, споредъ формула [20],

$$b_{0j} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j}\, \beta_{0j \cdot 1234 \dots n} \quad \text{и} \quad b_{j0} = \frac{\sigma_j}{\sigma_0}\, \beta_{j0 \cdot 1234 \dots n}$$

имаме окончателно:

$$r_{0j \cdot 1234 \dots n} = \sqrt{\beta_{0j \cdot 1234 \dots n} \cdot \beta_{j0 \cdot 1234 \dots n}} \qquad [29]$$

За случай на взаимната връзка между тритѣ реда: $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ ние, съ помощьта на формулата [22], намираме:

$$\left.\begin{aligned} r_{01 \cdot 2} &= \frac{r_{01} - r_{02}\, r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{02}^2)(1 - r_{12}^2)}}; \\ r_{02 \cdot 1} &= \frac{r_{02} - r_{01}\, r_{12}}{\sqrt{(1 - r_{01}^2)(1 - r_{12}^2)}}; \\ r_{12 \cdot 0} &= \frac{r_{12} - r_{01}\, r_{02}}{\sqrt{(1 - r_{01}^2)(1 - r_{02}^2)}} \end{aligned}\right\} \quad [30]$$

Интерпретирайки полученитѣ формули, не можемъ да не обърнемъ внимание върху известната изкуственость при тѣхното извеждане. Ние излѣзохме отъ аналогията съ формула [1], изведена за емпиричния коефициентъ на корелацията за случай съ две промѣнливи. Ние бихме могли, обаче, да изхождаме и отъ аналогията съ формула [4] за сѫщия коефициентъ и тогава бихме получили:

$$b_{0j} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j}\, r_{0j \cdot 1234 \dots n}$$

Така именно постѫпва, напримѣръ, Lucien March*). Неудобството на неговата формула е, че въ нѣкои случаи $\beta_{0j \cdot 1234 \dots n}$ по абсолютната си величина се оказва по-голѣма отъ 1 и, следователно, не може тогава да се разглежда като коефициентъ на корелацията.

Що се отнася до частичния коефициентъ на корелацията по формула [29], то неговия raison d'être е тамъ, че въ нѣкои случаи той се подава на просто тълкуване отъ гледище на вѣроятностната анализа на формитѣ на стохастическата (свободна) връзка между нѣколко случайни промѣнливи**). Обаче, отъ гледище на анализата на причинната връзка между вариациитѣ на нѣколко реда, сѫщиятъ коефициентъ може понѣкога да доведе до съвсемъ невъзможни изводи и затова прилагането му на практика крие въ себе си *голѣми опасности и трѣбва да става съ най-голѣма предпазливость*.

Да разгледаме, напримѣръ, следния простъ случай: хвърляме на нѣколко пѫти три зара. Точкитѣ на първия заръ при последователнитѣ хвърляния ще означаваме съ U_1, U_2, U_3, U_4 и т. н., кѫдето индекса долу означава нумера на хвърлянето. Точкитѣ на втория заръ ще сѫ W_1, W_2, W_3, W_4 и т. н.; на третия заръ — T_1, T_2, T_3, T_4 и т. н. Нека сега:

$$\left.\begin{aligned} X_i^{(0)} &= U_i + W_i + T_i \\ X_i^{(1)} &= U_i \\ X_i^{(2)} &= W_i \end{aligned}\right\} \quad [31]$$

Оттукъ следва, че въ нашия случай $E_i = T_i$.

Като приемеме, че заровете сѫ правилни и че между отдѣлнитѣ хвърляния нѣма никаква връзка, ние, съ помощьта на нѣколко теореми за математическитѣ очаквания, намираме:

$$\sigma_1 = \sigma_2;\ \sigma_0 = \sigma_1 \sqrt{3} = \sigma_2 \sqrt{3};\ r_{01} = r_{02} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ r_{12} = 0.$$

И по-нататъкъ, възъ основа на формули [20] и [22],

$$\beta_{01 \cdot 2} = \frac{+1}{\sqrt{3}};\ \beta_{02 \cdot 1} = \frac{+1}{\sqrt{3}};\ \beta_{10 \cdot 2} = \frac{+\sqrt{3}}{2};$$

$$\beta_{20 \cdot 1} = \frac{+\sqrt{3}}{2};\ \beta_{12 \cdot 0} = -\frac{1}{2};\ \beta_{21 \cdot 0} = -\frac{1}{2};$$

$$b_{01} = +1;\ b_{02} = +1;\ b_{10} = +\frac{1}{2};$$

$$b_{20} = +\frac{1}{2};\ b_{12} = -\frac{1}{2};\ b_{21} = -\frac{1}{2}.$$

За да преминемъ отъ тѣзи изрази къмъ приближенитѣ значения на величинитѣ отъ система [31], ние можемъ да се възползуваме отъ равенство [17 c.]

*) Lucien March, Les principes de la méthode statistique avec quelques applications aux sciences naturelles et à la science des affaires, Paris 1930, стр. 612.

**) Ср. напр. A. A. Tchuprow, The Mathematical Theory of the Statistical Methods Employed in the Study of Correlation in the Case of Three Variables, Cambridge 1928 (Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. XXIII, № XII), стр. 378 и 382.