

Предполагаме, че между X_1 и Y_1 , между X_2 и Y_2 , между X_3 и Y_3 и т. н. съществува известна „свободна“ зависимост и искаме да измърим нейната интензивност. Изчисляваме, първо, средно-аритметичните за първия редъ (нека бжде M_x) и за втория редъ (равна на M_y); изваждаме M_x отъ всѣки единъ членъ на първия редъ, а M_y отъ всѣки единъ членъ на втория редъ. Полученитѣ разлики ще означимъ съ малки букви x и y и съ сжщитѣ индекси на голѣмитѣ букви. Получаваме, по такъвъ начинъ, два нови, преобразувани редове, изразяващи последователнитѣ отклонения отъ срѣднитѣ:

първия редъ: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$;

втория редъ: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$.

Сега си задаваме въпроса: каква ще бжде формулата за връзката между x_1 и y_1 , x_2 и y_2 , x_3 и y_3, \dots, x_1 и y_1 и т. н., ако

1-о — тази връзка (зависимост) може да се изрази чрезъ цѣла рационална функция отъ първа степенъ (линейна функция),

2-о — тази функция остава една и сжща за всички N чифта членове отъ двата реда, и

3-о — къмъ нашия случай може да се приложи тѣй наречения „методъ на най-малкитѣ квадрати“.

Казано съ други думи, ние предполагаемъ, че връзката между произволния, i -тия членъ отъ първия редъ x_i , и съответния, i -тия членъ отъ втория редъ y_i (i може да е равно на $1, 2, 3, 4, \dots, N$), се изразява съ формула: $y_i = a_1 + b_1 x_i$ или пъкъ съ формула

$$x_i = a_2 + b_2 y_i.$$

Тукъ коефициентитѣ a_1, b_1, a_2 и b_2 сж константи („параметри“) на уравнението, и ние предполагаемъ, че тѣ оставатъ неизмѣнни за всичкитѣ N чифта наблюдения. Понеже значенията на всичкитѣ членове отъ двата реда сж ни известни, ние разполагаме за изчисляване на 4-тѣ неизвестни параметри a_1, b_1, a_2, b_2 съ $2N$ уравнения: N уравнения за изчисляването на a_1 и b_1 и N уравнения за намирането на a_2 и b_2 . Въ повечето случаи тѣзи уравнения ще се окажатъ взаимно несъвѣстими, като всѣка група отъ 4 уравнения ще дава други числени значения на търсенитѣ a_1, b_1, a_2 и b_2 . За да се избѣгне това вътрешно противоречие, ние прибѣгваме къмъ тѣй наречения „методъ на най-малкитѣ квадрати“. Тогава разсждаваме по следния начинъ.

Нека въ уравнението $y_i = a_1 + b_1 x_i$ величинитѣ a_1 и b_1 иматъ произволни значения a_1' и b_1' . Въ тоя случай, естествено, дѣсната част на нашето уравнение не може да бжде равна на лѣвата. Ако означимъ разликата имъ чрезъ e_i , очевидно е, че

$$y_i - a_1' - b_1' x_i = e_i,$$

и че e_i може да се смѣта като грѣшка на нашето опредѣление на a_1 и b_1 .

Търсимъ сега такива значения на a_1' и b_1' , щото сборътъ на квадратитѣ на грѣшкитѣ на всички N уравнения да бжде най-малкъ (отъ тукъ идва и названието: „методъ на най-малкитѣ квадрати“), т. е.

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - a_1' - b_1' x_i)^2 = \text{минимумъ}^*).$$

Така сложенъ въпросътъ, задачата за намирането на значенията a_1' и b_1' става математически напълно опредѣлена. Съгласно правилата на диференциалното смѣтане (приравняване на нула частнитѣ производни по a_1' , по b_1' и т. н.), ние лесно извеждаме:

$$a_1' = 0; \quad b_1' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

По сжщия начинъ отъ условното уравнение

$$\sum_{i=1}^N (e_i')^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - a_2' - b_2' y_i)^2 = \text{минимумъ}$$

получаваме

$$a_2' = 0; \quad b_2' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N y_i^2}$$

Значенията a_1', a_2', b_1', b_2' не сж истинскитѣ значения на параметритѣ на оная функция, която може би, въ действителность, свързва x_i и y_i , а само приближенитѣ до тѣхъ стойности, получени чрезъ метода на най-малкитѣ квадрати. Ако бѣхме поставили като условие

$$\sum_{i=1}^N e_i^3 = \text{минимумъ}, \text{ или } \sum_{i=1}^N e_i^4 = \text{минимумъ},$$

щѣхме да получимъ съвсемъ други значения.

Като означимъ геометрично-срѣдното отъ двата параметра b_1' и b_2' чрезъ r_{12}' , ще имаме:

$$r_{12}' = \sqrt{b_1' b_2'} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i^2}} \quad [1]$$

*) Знакътъ \sum означава, че трѣбва да се вземе сбора, който да обхваща всички величини съ индекси $1, 2, 3, 4$ и т. н., свършвайки съ индекса N . Напримеръ: $\sum_{i=1}^N e_i^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \dots + e_N^2$.