че, на всѣко значение X съответствува само едно значение Y, винаги $\eta_{y/x}' = 1$. Сжщото mutatis mutandis е справедливо и за $\eta_{x/y}$ (ср. Чупровъ, стр. 70).

Да разгледаме сега случая, когато ψ_i и ξ_i сж свързани помежду си съ линейна зависимость, така че

$\psi_i = a + b\,\xi_i$ при всѣко i.

Тогава

$$\sigma_\psi^2 = E[a + b\xi_i - E(a + b\xi_i)]^2 = E[b(\xi_i - E\xi)]^2 = b^2\sigma_\xi^2$$

Отъ друга страна:

$$E[(X_i - EX)(У_i - EУ)] = E\{[(\xi_i - E\xi) + (e_i - E_e)]\,[(\psi_i - E\psi) + (\varepsilon_i - E\varepsilon)]\} =$$
$$= E[(\xi_i - E\xi)(\psi_i - E\psi)] + E[(e_i - Ee)(\psi_i - E\psi)] + E[(\xi_i - E\xi)(\varepsilon_i - E\varepsilon)] + E[(e_i - Ee)(\varepsilon_i - E\varepsilon)].$$

Ако „е" и ψ, ξ и ε, „е" и ε сж взаимно стохастически независими величини, последнитѣ три члена на дѣсната часть изчезватъ и ние получаваме:

$$E[(X_i - EX)(У_i - EУ)] = E[(\xi_i - E\xi)(\psi_i - E\psi)]$$

По нататъкъ:

$$E[(\xi_i - E\xi)(\psi_i - E\psi)] = E\{(\xi_i - E\xi)\,b\,(\xi_i - E\xi)\} = b\,\sigma_\xi^2 = \sigma_\xi \,.\, b\,\sigma_\xi$$

Но понеже, както се каза по-горе,

$$\sigma_\psi = |b|\,\sigma_\xi$$

(вертикалнитѣ черти при b показватъ, че тази величина се взема тукъ винаги съ знакъ +), получаваме окончателно:

$$E[(X_i - EX)(У_i - EУ)] = \pm\,\sigma_\xi\,\sigma_\psi,$$

дето знака (+) или (—) се опредѣля отъ знака на коефициента b.

Формулата за априорния коефициентъ на корелацията, както е известно, е:

$$r_{12} = \frac{E[X_i - EX)(У_i - EУ)]}{\sqrt{E(X_i - EX)^2\,E(У_i - EУ)^2}}$$

Като внесемъ въ нея полученитѣ значения, получаваме

$$r_{12} = \pm\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\,.\,\frac{\sigma_\psi}{\sigma_y} = \pm\,q_1 q_2 = \pm\,H.$$

Ще посочимъ още следнитѣ интересни съотношения.

Нека предположимъ, че сме хвърлили едновременно m бѣли и n червени зара. Да означимъ съ U — общия брой точки на червенитѣ зарове, съ W — сжщото нѣщо за бѣлитѣ зарове. Приемаме $X = U + W$.

Оставяме бѣлитѣ зарове на масата, а червенитѣ хвърляме втори пжть. Новиятъ общъ брой точки на червенитѣ зарове означаваме съ T и пишемъ $У = W + T$. Търси се априорния коефициентъ на корелацията между X и У.

Ние имаме, очевидно, $W = \xi = \psi$; $U = e$; $T = \varepsilon$; връзката между ξ и ψ е линейна, е, ε и ξ сж взаимно независими, и, следователно $r_{12} = q_1\,q_2$.

Означаваме съ σ стандартното отклонение на броя на точкитѣ на единъ заръ. Предъ видъ независимостьта на резултатитѣ отъ хвърлянето за отдѣлнитѣ зарове, имаме:

$$\sigma_\xi^2 = m\,\sigma^2;\quad \sigma_\psi^2 = m\,\sigma^2;\quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = (m+n)\,\sigma^2$$

Като поставимъ тѣзи значения въ формулата за r_{12} и съкратимъ σ^2, получаваме:

$$r_{12} = \sqrt{\frac{m}{m+n}}\,\sqrt{\frac{m}{m+n}} = \frac{m}{m+n}$$

Коефициентътъ на корелацията между X и У е равенъ, следователно, на честотата на бѣлитѣ зарове между всички зарове. И понеже броя на бѣлитѣ зарове е, тъй да се каже, броя на „общитѣ причини" за всѣки чифтъ наблюдения, а общия брой на бѣлитѣ и червенитѣ зарове е „броя на всичкитѣ причини", получения резултатъ придобива единъ ясенъ смисълъ. Формулата $\frac{m}{m+n}$ е била изведена на времето отъ A. M. Darbishire (вж. Mem. and Proc. of the Mancherter Lit. and Phil. Soc., Vol. LI, 1907).

Ако броя на червенитѣ зарове, влизащи въ X и У, е различенъ и е равенъ съответно на n и l, ние идваме до по-общата формула на Чупровъ:

$$r_{12} = \frac{m}{\sqrt{m+n}\,\sqrt{m+l}}$$ (вж. Чупровъ, стр. 57, Darmois, page 203).

Случая може да се обобщи още повече.

Имаме сандъче съ всичко N зара. Теглимъ отъ него „случайно" (au hasard) $N_1 = (m_1 + n_1)$ зара, хвърляме ги на масата и отбелязваме общия брой X на полученитѣ точки. Връщаме въ сандъчето n_1 зара, изваждаме оттамъ и прибавяме къмъ всѣки единъ отъ m_1 останали на масата зара *по* (b—1) зара съ по сжщия брой точки, теглимъ още n_2 нови зара отъ сандъчето и ги хвърляме на масата.

Сбора на точкитѣ на оказалитѣ се върху масата $m_1 + (b-1)\;m_1 + n_2$ зара означаваме съ У.

Търси се априорния коефициентъ на корелацията между X и У.

Ако въведемъ обозначение:

$$m_1 + (b-1)\,m_1 = bm_1 = m_2 \text{ и } m_2 + n_2 = N_2$$

получаваме, безъ много трудъ, общата формула:

$$r_{12} = \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + n_1}}\,\sqrt{\frac{m_2}{m_2 + n_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{N_1}}\,\sqrt{\frac{m_2}{N_2}}$$

Като раздѣлимъ числителитѣ и знаменателитѣ на подкореннитѣ величини на N и приемемъ $\frac{m_1}{N} = p_1$; $\frac{n_1}{N} = p_2$; $\frac{m_2}{N} = p_3$ (p_3, очевидно, е равно на bp_1) и $\frac{n_2}{N} = p_4$,

формулата добива видъ:

$$r_{12} = \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + p_2}}\,\sqrt{\frac{p_3}{p_3 + p_4}} = \sqrt{\frac{p_1}{p_1 + p_2}}\,\sqrt{\frac{b\,p_1}{bp_1 + p_4}}$$

Коефициентитѣ p_1, p_2, p_3 и p_4 иматъ характеръ на математически вѣроятности. Формулата има известна прилика съ формулата на стр. 240 у Darmois: „Statistique mathématique".

35