Тази формула е по-проста отъ [39], като се равнява точно на нейния знаменатель. Тя може да се прилага и за случая, когато e_i и $\overline{X}_i$ *не сѫ* взаимно независими (гл. горе стр. 264).

Ако, обаче, връзката между реда 0 и останалитѣ редове на система [14] е наистина линейна, и ако въ равенство [18] наистина сѫ включени всичкитѣ редове, влияющи върху редътъ 0, ние можемъ съ право да приемемъ, че e_i и $\overline{X}_i$ сѫ взаимно независими. Това допущане води къмъ значително упростяване на формулата за множествения коефициентъ на корелацията $r_{0\cdot1234\,\dots\,n}$.

Ние имаме въ този случай $E\,(l_i\,\overline{X}_i) = 0$ и съ помощьта на формула [35] получаваме

$$E\,[e_i\,(x_i^{(0)} - e_i)] = 0$$

и по-нататъкъ:

$$E\,e_i\,x_i^{(0)} = E\,e_i^2 = \sigma_e^2.$$

Изразъ [36], следователно, съ обръща въ

$$r_{0\cdot1234\,\dots\,n} = \frac{\sigma_0^2 - \sigma_e^2}{\sqrt{\sigma_0^2\,(\sigma_0^2 + \sigma_e^2 - {}^2\sigma_e^2)}} = \frac{\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma_e^2}}{\sigma_0} \qquad [43]$$

Тази формула ни позволява да направимъ две заключения.

Отъ една страна, тя направо може да се представи въ видъ

$$r_{0\cdot1234\,\dots\,n} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_0^2}}$$

Като означимъ $k_{0\cdot1234\,\dots\,n} = \dfrac{\sigma_e}{\sigma_0}$ [44]

получаваме тождество, което нѣкои теоретици, безъ достатъчно за това основание, приематъ като основа за цѣлата теория на множествената корелация:

$$r^2_{0\cdot1234\,\dots\,n} = 1 - k^2_{0\cdot1234\,\dots\,n} \qquad [45]$$

Коефициентътъ $k_{0\cdot1234\,\dots\,n}$ се нарича *априоренъ коефициентъ на алиенацията*)*.

Отъ друга страна, при $E\,(e_i\,\overline{x}_i) = 0$, получаваме отъ равенство [35]

$$\sigma_0^2 = \overline{\sigma}^2 + \sigma_e^2 \text{ или } \overline{\sigma}^2 = \sigma_0^2 - \sigma_e^2$$

Формула [43] дава тогава

$$r_{0\cdot1234\,\dots\,n} = \frac{\overline{\sigma}}{\sigma_0} \qquad [46]$$

Сравнението на тази формула съ формула [40] ни убеждава въ това, че наистина при независимостьта на e_i отъ $\overline{x}_i$ априорния множественъ коефициентъ на корелацията се равнява точно на мѣрката H. Това трѣбваше да се очаква.

Полученитѣ формули позволяватъ да намѣримъ единъ по-простъ изразъ за $r_{0\cdot123\,\dots\,n}$.

*) На стр. 135 на „Korrelationsrechnung" азъ допуснахъ $E\,(e_i\,x_i^{(0)}) = 0$, вмѣсто $E\,(e_i\,\overline{x}_i) = 0$, и получихъ затова малко по-друга формула за връзката между $r_{0\cdot123\,\dots\,n}$ и $k_{0\cdot123\,\dots\,n}$. Ползувамъ се отъ случая, за да поправя тази грѣшка, която, впрочемъ, съвсемъ не се е отразила на другитѣ изводи на работата ми.

Като умножимъ [34] почленно съ $x_i^{(0)}$, сетне преминемъ къмъ математическитѣ очаквания и вземемъ подъ внимание [20] и [36ª], намираме лесно:

$$E\,x_i^{(0)}\,\overline{x}_i = \sigma_0^2\,(\beta_{01}\,r_{01} + \beta_{02}\,r_{02} + \beta_{03}\,r_{03} + \dots + \beta_{0n}\,r_{0n})$$

За да получимъ $r_{0\cdot123\,\dots\,n}$, трѣбва този изразъ да раздѣлимъ на $\sigma_0\,\overline{\sigma}$, т. е.

$$r_{0\cdot123\,\dots\,n} = \frac{\sigma_0}{\overline{\sigma}}\,(\beta_{01}\,r_{01} + \beta_{02}\,r_{02} + \beta_{03}\,r_{03} + \dots + \beta_{0n}\,r_{0n}).$$

Но ние видѣхме преди малко, че при *независимостьта $\overline{x}_i$ отъ e_i*

$$\frac{\sigma_0}{\overline{\sigma}} = \frac{1}{r_{0\cdot123\,\dots\,n}}$$

Следователно:

$$r^2_{0\cdot123\,\dots\,n} = \beta_{01}\,r_{01} + \beta_{02}\,r_{02} + \beta_{03}\,r_{03} + \dots + \beta_{0n}\,r_{0n} \qquad [47]$$

или

$$r_{0\cdot1234\,\dots\,n} = \sqrt{\beta_{01}\,r_{01} + \beta_{02}\,r_{02} + \beta_{03}\,r_{03} + \dots + \beta_{0n}\,r_{0n}} \qquad [48]$$

Формула [48] е интересна, на първо мѣсто, съ това, че дѣсната ѝ часть е квадратенъ коренъ отъ числителя на по-общата формула [39]. Формула [47] ни позволява да установимъ съ по-голѣма ясность какъ множествения коефициентъ на корелацията се съставя отъ коефициентитѣ на отдѣлнитѣ редове отъ система [14] и доколко той се промѣня при включване въ системата на този или онзи редъ. Watkins нарича произведенията отъ типъ $\beta_{0j}\,r_{0j}$ „coefficient of net determination" (коефициентъ на чистото опредѣляне, или „вмѣнение"), а величината $r^2_{0\cdot123\,\dots\,n}$ „coefficient of total de termination" (коефициентъ на брутното опредѣляне, или „вмѣнение").

Много интересно е, че въ случай на корелация между три реда, формули [39], [42] и [48], които иматъ различни степени на общность, и които, както видѣхме, не изхождатъ даже отъ едни и сѫщи предпоставки, довеждатъ, все пакъ, до еднакви резултати.

Наистина, за случая на три реда $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ получаваме

отъ формула [39]:

$$r_{0\cdot12} = \frac{\beta_{01\cdot2}\,r_{01} + \beta_{02\cdot1}\,r_{02}}{\sqrt{\beta^2_{01\cdot2} + \beta^2_{02\cdot1} + 2\beta_{01\cdot2}\,\beta_{02\cdot1}\,r_{12}}}$$

отъ формула [42]:

$$H = \sqrt{\beta^2_{01\cdot2} + \beta^2_{02\cdot1} + 2\beta_{01\cdot2}\,\beta_{02\cdot1}\,r_{12}};$$

и, най-сетне, отъ формула [48]

$$r_{0\cdot12} = \sqrt{\beta_{01\cdot2}\,r_{01} + \beta_{02\cdot1}\,r_{02}}$$

Съ *помощьта на* [22] *и тритѣ тия формули* привеждатъ къмъ единъ и сѫщъ изразъ:

$$r_{0\cdot12} = \sqrt{\frac{r_{01}^2 + r_{02}^2 - 2r_{01}\,r_{02}\,r_{12}}{1 - r_{12}^2}} \qquad [49]$$

Когато броя на редоветѣ въ система [14] е по-голѣмъ отъ три, това съвпадане вече нѣма да има мѣсто. Все пакъ, изглежда, че и