## ГЛАВА I.

# ОПРЕДѢЛЯНЕ НА БИОМЕТРИЧНИТѢ ФУНКЦИИ

### 1. Вѣроятности за умиране и преживяване

За да опредѣлимъ вѣроятностьта за умиране, поставяме подъ наблюдение единъ голѣмъ брой $l_0$ едновременно родени индивиди. Следъ това броимъ колко индивиди отъ първоначално взетитѣ $l_0$ сѫ още живи въ годинитѣ (цѣли години) $t+1$, $t+2 \ldots t+x$, $t+x+1$ $t+w-1$, като допускаме, че нито единъ индивидъ отъ всичкитѣ $l_0$ не ще достигне възрасть $w$ години. Тукъ $t$ означава времето (момента) на раждането. Така полученитѣ числа, заедно съ първоначално взетото, образуватъ редъ на последователно преживѣлитѣ лица

$$l_0,\ l_1,\ l_2, \ldots l_x,\ l_{x+1} \ldots l_{w-1}. \qquad (1)$$

Ако преброимъ лицата, които сѫ умрѣли презъ течение на годинитѣ $(t, t+1)$, $(t+1, t+2)$ $(t+w-1,\ t+w)$, то тѣхниятъ брой ще бѫде числото на умрѣлитѣ лица

$$d_0,\ d_1,\ d_2 \ldots d_x \ldots d_{w-1}. \qquad (2)$$

Между броя на преживѣлитѣ и умрѣлитѣ лица сѫществува зависимостьта

$$d_x = l_x - l_{x+1}. \qquad (3)$$

Отношението

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \qquad (4)$$

е вѣроятностьта, че едно лице, което е достигнало възрасть $x$ години, ще умре преди да достигне възрастьта $x+1$ години. Тя се нарича *едногодишна вѣроятность за умиране при възрасть* $x$. Отношението

$$p_x = 1 - q_x = \frac{l_x - d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad (5)$$

е вѣроятностьта, че едно лице, което е достигнало възрасть $x$ год., ще преживѣе възрастьта $x+1$ год., и се нарича *едногодишна вѣроятность за преживяване при възрасть $x$ год.*

Всѣки единъ отъ редоветѣ:

$$q_0,\ q_1,\ q_2 \ldots q_x \ldots q_{w-1} \qquad (6)$$

$$p_0,\ p_1,\ p_2 \ldots p_x \ldots p_{w-1} \qquad (7)$$

както и редоветѣ (1) и (2), могатъ да изразятъ хода на смъртностьта.

### 2. Моментенъ коефициентъ на смъртностьта

Обикновенно приемаме, че $q$ изразява вѣроятностьта за умиране за една опредѣлена възрасть въ течение на една цѣла година и че вѣроятностьта за умиране е еднаква презъ течение на цѣлата година, въ който моментъ на годината и да настѫпи смъртьта. Вѣроятностьта може да се разпространи и за безкрайно малки периоди, като допустнемъ, че $l_x$ е непрекѫсната функция на възрастьта $x$. Тази функция изразява намалението на преживѣлитѣ съ увеличението на възрастьта и приема стойности (1) за цѣли стойности на $x$.

И така ние приемаме, че $l_x = f(x)$ е числото на живущитѣ при възрасть $x$, а $f(x+1)$ е числото на живущитѣ при възрасть $x+1$.

Ако приемемъ за единица време годината, то $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ е вѣроятностьта, че едно $x$ годишно лице следъ една година ще бѫде още живо, а

$$1 - \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)},$$

е вѣроятностьта, че едно $x$ годишно лице ще умре презъ течение на годината.

Ако вземемъ сега не 1 година, а $h$ годишенъ периодъ, гдето $h$ е по-голѣмо или по-малко отъ единица, то вѣроятностьта, едно $x$ годишно лице да умре презъ течение на $h$ години, ще бѫде:

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)}.$$

За да получимъ срѣдната годишна вѣроятность за умиране на едно $x$ годишно лице за периода $h$ години, раздѣляме горния изразъ съ $h$. Получаваме:

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x)}.$$

Тази срѣдна вѣроятность за умиране не може да се замѣни съ срѣдната аритметична отъ вѣроятноститѣ за умиране за различни години.

Тъй като споредъ теоремата за срѣднитѣ стойности имаме $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x + \theta h)$ гдето $0 < \theta < 1$, то следва

$$\frac{f(x) - f(x+h)}{h} = -f'(x + \theta h).$$

Отъ тукъ при приближаването на $h$ къмъ граница 0 се получава:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h f(x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ако замѣнимъ $f(x)$ съ $l_x$ — числото на живущитѣ при възрасть $x$, получаваме израза:

$$-\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{l_x} \cdot \frac{dl_x}{dx} = \mu_x \qquad (8)$$

кѫдето „$d$“ означава знака на диференциала за разлика отъ знака $d$ въ формула (3).

Този изразъ представлява редуцираната къмъ една година вѣроятность за умиране на едно $x$ годишно лице въ даденъ моментъ и се нарича *моментенъ коефициентъ на смъртностьта или „сила на смъртностьта“*.

Отъ формула (8) следва $-dl_x = \mu_x l_x dx$ и отъ тукъ, ако интегрираме въ границитѣ $x_1 < x_2$ получаваме:

$$l_{x_1} - l_{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \mu_x l_x \, dx.$$