D'après la condition on a

$$(6)\qquad F_1(x,y)=\frac{[a(x)]^y}{y!}e^{-a(x)},$$

la loi sur la répartition des probabilités devant être celle de Poisson et l'espérance mathématique (la constante dans la formule) devant dépendre, de façon générale, de l'autre variable x. Partiellement, si a(x) ne dépend pas de x, on aura des variables indépendantes et la question est résolue par (2). Analogiquement on a par supposition

$$(7)\qquad \Phi_1(x,y)=\frac{[b(y)]^x}{x!}e^{-b(y)}.$$

A l'aide des formules (6) et (7), par calcul logarithmique, on obtient

$$F(x,y)=\log F_1(x,y)=y\log a(x)-a(x)-\log(y!),$$

$$\Phi(x,y)=\log \Phi_1(x,y)=x\log b(y)-b(y)-\log(x!).$$

On obtient facilement à l'aide des équations ci-dessus

$$\underset{x}{\triangle} F(x,y)=y\underset{x}{\triangle}\log a(x)-\underset{x}{\triangle}a(x),$$

$$\underset{y}{\triangle}\Phi(x,y)=x\underset{y}{\triangle}\log b(y)-\underset{y}{\triangle}b(y).$$

$$\underset{x,y}{\triangle^2} F(x,y)=\underset{x}{\triangle}\log a(x)=\log\frac{a(x+1)}{a(x)},$$

$$\underset{x,y}{\triangle^2}\Phi(x,y)=\underset{y}{\triangle}\log b(y)=\log\frac{b(x+1)}{b(y)},$$

En posant les valeurs obtenues pour $\underset{x,y}{\triangle^2} F(x,y)$, $\underset{x,y}{\triangle^2}\Phi(x,y)$ dans (5) et par calcul antilogarithmique, nous trouvons

$$(8)\qquad \frac{a(x+1)}{a(x)}=\frac{b(y+1)}{b(y)},$$

équation qui doit se suffire pour tous les x et y. Cela montre que nous aurons

$$(9)\qquad \frac{a(x+1)}{a(x)}=\mu,\ \frac{b(y+1)}{b(y)}=\mu,$$

où μ est une constante indépendante de x et y. Désignons a(0) par a et b(0) par b. Nous avons par la première équation (9), en posant à la place de x les valeurs 0, 1, 2, . . . x—1,

$$\begin{aligned} a(1)&=\mu a,\\ a(2)&=\mu a(1),\\ a(3)&=\mu a(2),\\ &\ \ \cdots\\ a(x)&=\mu a(x-1),\end{aligned}$$

d'où, par multiplication, nous obtenons

$$(10)\qquad a(x)=a\mu^x.$$

Analogiquement nons avons par la deuxième équation

$$(11)\qquad b(y)=b\mu^y.$$

Il est évident que les nombres a, b, μ sont positifs.

Il ressort des formules (6), (7), (10), (11) que $F_1(x,y)$ et $\Phi_1(x,y)$ auront la forme

$$(12)\qquad \begin{cases} F_1(x,y)=\dfrac{a^y\mu^{xy}}{y!}e^{-a\mu^x}\\[2mm] \Phi_1(x,y)=\dfrac{b^x\mu^{xy}}{x!}e^{-b\mu^y}\end{cases}$$

La première nous donne la loi sur les probabilités de y, x étant fixé, et la seconde — la loi sur les probabilités de x; y étant fixé.

On vérifie facilement que

$$(13)\qquad \sum_{y=0}^{\infty}F_1(x,y)=1,\quad \sum_{x=0}^{\infty}\Phi_1(x,y)=1.$$

comme cela doit être. En effet nous avons

$$\sum_{y=0}^{\infty}F_1(x,y)=e^{-a\mu^x}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{a^y\mu^{xy}}{y!}=e^{-a\mu^x}e^{a\mu^x}=1.$$

C'est ce que nous avons analogiquement pour la seconde équation (13).

Nous obtenons de (3) et (12)

$$f(x)\frac{a^y\mu^{xy}}{y!}e^{-a\mu^x}=\varphi(y)\frac{b^x\mu^{xy}}{x!}e^{-b\mu^y}$$

d'où nous avons

$$\frac{f(x)}{\dfrac{b^x e^{a\mu^x}}{x!}}=\frac{\varphi(y)}{\dfrac{a^y e^{b\mu^y}}{y!}},$$

équation qui nous indique que

$$(14)\qquad \begin{cases} f(x)=C\dfrac{b^x e^{a\mu^x}}{x!}\\[2mm] \varphi(y)=C\dfrac{a^y e^{b\mu^y}}{y!},\end{cases}$$

où C est une constante indépendante de x et y. La constante C est à déterminer. Vu que f(x) et $\varphi(y)$ sont des lois sur des probabilités de variables ne prenant que les valeurs 0, 1, 2, 3, ... , il faut avoir

$$(15)\qquad \sum_{x=0}^{\infty}f(x)=1,\quad \sum_{y=0}^{\infty}\varphi(y)=1.$$

Désignons alors par g(u, v) la fonction des variables u, v,

$$(16)\qquad g(u,v)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^n}{n!}e^{uv^n}.$$

Par les formules (14), les équations (15) se réduisent à

$$(17)\qquad \begin{cases} C\displaystyle\sum_{x=0}^{\infty}\frac{b^x}{x!}e^{a\mu^x}=1,\\[2mm] C\displaystyle\sum_{y=0}^{\infty}\frac{a^y}{y!}e^{b\mu^y}=1,\end{cases}$$

les séries devant être convergentes. Le rapport du (x+2)—ème terme au (x+1)—ème terme dans les deux séries est respectivement égal à

$$\frac{b^{x+1}e^{a\mu^{x+1}}}{(x+1)!}:\frac{b^x e^{a\mu^x}}{x!}=\frac{b}{x+1}e^{a\mu^x(\mu-1)}$$