ВЪРХУ ЗАКОНА ЗА МАЛКИТѢ ЧИСЛА И РЕДА НА CHARLIER ВЪ МАТЕМАТИЧЕСКАТА СТАТИСТИКА

Проф. Д-ръ Н. ОБРЕШКОВЪ

Въ настоящата статия се занимавамъ съ закона за малкитѣ числа на Poisson. Именно, нека x е промѣнливо, което може да взема стойноститѣ 0, 1, 2, 3,... Законътъ за вѣроятноститѣ на Poisson се дава съ формулата

$$p(x)=\frac{a^x}{x!}e^{-a},$$

дето a е константа и $p(x)$ означава вѣроятностьта промѣнливото да вземе стойность x. По самия начинъ на извеждане формулата на Poisson дава добро приближение за по-рѣдки явления, отдето идва и названието на въпросния законъ.

Отначало давамъ разширение на горната формула за случай на две промѣнливи, свързани корелативно и удовлетворяващи поотдѣлно закона на Poisson. Установявамъ следната теорема: нека промѣнливитѣ x, y да взематъ стойноститѣ 0, 1, 2, 3, ..., така, че при фиксирана коя да е стойность на едното промѣнливо, другото се подчинява на разпредѣлението на Poisson. Тогава вѣроятностьта $P(x,y)$ едното промѣнливо да вземе стойность x, а другото стойность y, се дава съ

$$P(x,\ y)=C\frac{a^y\,b^x}{x!\ y!}\mu^{xy},$$

дето $0<\mu<1$, a, b, C сѫ три константи, между които има две релации, които ще посочимъ въ изложението.

Въ параграфъ 2 установявамъ нови свойства на често приложимия редъ на Charlier въ статистиката и въ параграфъ 3 давамъ едно разширение на формулата на Poisson.

1. Нека едно промѣнливо x взема стойноститѣ 0, 1, 2, 3,... съ съответни вѣроятности. Законътъ на Poisson за разпредѣлението на вѣроятноститѣ се дава съ формулата

$$p(x)=\frac{a^x}{x!}e^{-a},\quad a>0, \tag{1}$$

дето $p(x)$ е вѣроятностьта промѣнливото да взема стойность x. Нека разгледаме сега две промѣнливи x и y, които могатъ да взематъ стойноститѣ 0, 1, 2,... Да предположимъ отначало, че промѣнливитѣ сѫ независими помежду си, т. е. вѣроятностьта $p_1(y_1)$ щото y да вземе стойность y_1 не зависи отъ значението, което е взело x. Ако освенъ x и промѣнливото y се подчинява на закона на Poisson за вѣроятноститѣ, то вѣроятностьта $P(x,\ y)$ за двитѣ промѣнливи по теоремата за сложна вѣроятность ще бѫде равна на

$$P(x,\ y)=\frac{a^x\ b^y}{x!\ y!}e^{-(a+b)}, \tag{2}$$

дето $\frac{b^y}{y!}e^{-b}$ е закона за y.

Да разгледаме сега колективи, зависящи отъ две промѣнливи, които могатъ да взематъ стойностьта 0, 1, 2, ..., но зависими помежду си, т. е. за различни стойности на едното промѣнливо законътъ за вѣроятноститѣ на другото промѣнливо да се мѣни. Ние ще намѣримъ законътъ за вѣроятноститѣ на двитѣ промѣнливи, като предполагаме, че при фиксиране на стойностьта на едното промѣнливо, другото се винаги подчинява на закона за малкитѣ числа. Нека $f(x)$ означава вѣроятностьта a priori за x и $\varphi(y)$ е тази за y. Нека тогава $F(x_1, y_1)$ е вѣроятностьта y да вземе стойность y_1 при $x=x_1$, а $\Phi_1(x_1, y_1)$ е вѣроятностьта x да вземе стойность x_1 при $y=y_1$. По теоремата за сложна вѣроятность ще имаме

$$f(x)F_1(x,\ y)=\varphi(y)\ \Phi_1(x,\ y) \tag{3}$$

за всички стойности на x и y. Отъ (3) имаме

$$\log f(x)+\log F_1(x,\ y)=\log\varphi(y)+\log\Phi_1(x,\ y),$$

и като въведемъ означенията

$$\log f(x)=f_1(x),\ \log\varphi(y)=\varphi_1(y),$$
$$\log F_1(x,\ y)=F(x,\ y),\ \log\Phi_1(x,\ y)=\Phi(x,\ y),$$

получаваме

$$f_1(x)+F(x,y)=\varphi_1(y)+\Phi(x,y). \tag{4}$$

Нека сега съ $\underset{x}{\triangle}\, g(x,\ y)$ означаваме операцията

$$\underset{x}{\triangle}\, g(x,\ y)=g(x+1,\ y)-g(x,\ y).$$

Очевидно, ако g не зависи отъ x, то имаме $\underset{x}{\triangle}\, g=0$. Прилагайки тогава върху двитѣ части на уравнението (4) операциитѣ $\underset{x}{\triangle}$ и $\underset{y}{\triangle}$, получаваме

$$\underset{x}{\triangle}\, f_1(x)+\underset{x}{\triangle}\, F(x,\ y)=\underset{x}{\triangle}\,\Phi(x,\ y)$$

$$\underset{x,y}{\triangle^2} F(x,\ y)=\underset{x,y}{\triangle^2}\Phi(x,\ y). \tag{5}$$