Pour le cas de la liaison mutuelle entre les trois séries: $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$, nous trouvons à l'aide de la formule [22]:

$$\left.\begin{aligned} r_{01\cdot 2} &= \frac{r_{01} - r_{02}\, r_{12}}{\sqrt{(1-r^2_{02})\,(1-r^2_{12})}}\,; \\ r_{02\cdot 1} &= \frac{r_{02} - r_{01}\, r_{12}}{\sqrt{(1-r^2_{01})\,(1-r^2_{12})}}\,; \\ r_{12\cdot 0} &= \frac{r_{12} - r_{01}\, r_{02}}{\sqrt{(1-r^2_{01})\,(1-r^2_{02})}} \end{aligned}\right\} \quad [30]$$

En interprétant les formules obtenues, nous ne saurions nous empêcher d'attirer l'attention sur une qualité artificielle de leur déduction. Nous nous sommes basés sur l'analogie avec la formule [1] ralative au coefficient de corrélation empirique dans le cas de deux variables. Cependant, nous pourrions nous baser également sur l'analogie avec la formule [4] relative au même coefficient, et alors nous obtenons:

$$b_{0j} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j}\, r_{0j\,\cdot\,1234\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\, n}$$

C'est ainsi que procède, par exemple, *Licien March**). Ce que sa formule produit d'inconvément, c'est que dans certains cas $\beta_{oj.1234\,\cdot\,\cdot\,\cdot\, n}$ paraît, par sa grandeur absolue, supérieur à 1 et, par conséquent, ne peut être considéré comme coefficient de corrélation.

Quant au coefficient partiel de la corrélation d'après la formule [29], sa raison d'être consiste en ce que dans certains cas il se soumet à une simple interprétation au point de vue de l'analyse de probabilité des formes de la liaison stochastique (libre) entre quelques variables aléatoires**). Mais, au point de vue de l'analyse de la liaison causale entre les variations de plusieurs séries, le même coefficient peut quelquefois nous conduire à des déductions tout à fait impossibles; pour cette raison son application en pratique dissimule *de grands risques et doit se faire avec circonspection.*

Prenons, par exemple, le cas suivant qui est très simple: nous jetons à plusieurs reprises 3 dés. Nous désignons par U_1, U_2, U_3, U_4, etc. les points du premier dé dans les épreuves successives, où l'indice en bas marque le numéro de l'épreuve. Les points du deuxième dé seront W_1, W_2, W_3, W_4, etc., du troisième dé— T_1, T_2, T_3, T_4, etc.

Nous poserons:

$$\begin{aligned} X_i^{(0)} &= U_i + W_i + T_i \\ X_i^{(1)} &= U_i \\ X_i^{(2)} &= W_i. \end{aligned} \qquad [31]$$

Il résulte de là que dans notre cas $E_i = T_i$.

En admettant que les dés soient réguliers et qu'il n'existe aucune liaison entre les différentes épreuves, nous trouvons à l'aide de quelques théorèmes relatifs aux espérances mathématiques:

$$\sigma_1 = \sigma_2;\ \sigma_0 = \sigma_1\sqrt{3} = \sigma_2\sqrt{3};\ r_{01} = r_{02} = \frac{1}{\sqrt{3}};\ r_{12} = 0$$

Et ensuite, sur la base des formules [20] et [22]:

$$\beta_{01\cdot 2} = \frac{+1}{\sqrt{3}};\ \beta_{02\cdot 1} = \frac{+1}{\sqrt{3}};\ \beta_{10\cdot 2} = \frac{+\sqrt{3}}{2};$$

$$\beta_{20\cdot 1} = \frac{+\sqrt{3}}{2};\ \beta_{12\cdot 0} = -\frac{1}{2};\ \beta_{21\cdot 0} = -\frac{1}{2};$$

$$b_{01} = +1;\ b_{02} = +1;\ b_{10} = +\frac{1}{2};\ b_{20} = +\frac{1}{2};$$

$$b_{12} = +\frac{1}{2};\ b_{21} = -\frac{1}{2}.$$

Pour passer de ces expressions aux valeurs approchées des grandeurs du système [31], nous pouvons profiter de l'égalite [17c]

$$X_i^{(0)} - EX^{(0)} = b_{01}\,(X_i^{(1)} - E\,X^{(1)}) + \\ + b_{02}\,(X_i^{(2)} - E\,X^{(2)}) + E_i - EE$$

ou, après avoir ouvert les parenthèses,

$$X_i^{(0)} = b_{01}\,X_i^{(1)} + b_{02}\,X_i^{(2)} + E_i + \\ + [E\,X^{(0)} - b_{01}\,E\,X^{(1)} - b_{02}\,E\,X^{(2)} - E\,E]$$

Dans notre cas

$$E\,X^{(0)} = E\,U + E\,W + E\,T;\ E\,X^{(1)} = E\,U; \\ E\,X^{(2)} = E\,W;\ E\,E = E\,T.$$

L'expression entre les parenthèses médianes disparaît et nous obtenons:

$$X_i^{(0)} = X_i^{(1)} + X_i^{(2)} + E_i = U_i + W_i + T_i,\quad [32]$$

c.-a.-d. un résultat identique à [31].

Si de la même manière nous voulons obtenir de l'équation

$$X_i^{(1)} - E\,X^{(1)} = b_{10}\,(X_i^{(0)} - E\,X^{(0)}) + \\ + b_{12}\,(X_i^{(2)} - E\,X^{(2)}) + E'_i - E\,E'$$

la valeur de $X_i^{(1)}$, nous nous heurterons tout de suite à des difficultés provenant da la grandeur $(E'_i - E\,E')$ qui passe dans l'expression relative à $X_i^{(1)}$ du système [31].

Après quelques transformations, nous obtenons

$$X_i^{(1)} = \frac{1}{2}\,X_i^{(0)} - \frac{1}{2}\,X_i^{(2)} + (E'_i - E\,E') + \frac{E\,U - E\,T}{2}$$

Dans notre cas $E\,U = E\,T$, par conséquent nous pouvons écrire:

$$X_i^{(1)} = \frac{1}{2}\,X_i^{(0)} - \frac{1}{2}\,X_i^{(2)} + (E'_i - E\,E') \quad [33]$$

En remplaçant $X_i^{(0)}$ et $X_i^{(2)}$ par leurs valeurs du système [31], nous obtenons:

$$X_i^{(1)} = \frac{U_i + T_i}{2} + (E'_1 - E\,E')$$

$$\text{soit } U_i = \frac{U_i + T_i}{2} + (E'_i - E\,E')$$

d'où:

$$(E' - E\,E') = \frac{U_i - T_i}{2}$$

ce qui en réalité doit être:

$$E_1 - E\,E = 0!$$

---

*) Lucien March, Les principes de la méthode statistique avec quelques applications aux sciences naturelles et à la science des affaires, Paris 1930, page 612.

**) A. A. Tchouproff, The Mathematical Theory of the Statistical Methods Employed in the Study of Correlation in the Case of Thre Variables, Cambriedge 1928 (Transactions of the Cambriedge Philosophical Society, vol. XXIII, № XII), pages 378 et 382.