additives et que le multiplicateur constant peut être porté en dehors du signe E, nous aurons:

$$E\,X_i^{(0)} = b_{01}\,E\,X_i^{(1)} + b_{02}\,E\,X_i^{(2)} + b_{03}\,E\,X_i^{(3)} + \ldots + b_{on}\,E\,X_i^{(n)} + E\,E_i \quad [17^b]$$

En déduisant [17^b], terme par terme, de [17^a], nous obtenons:

$$X_i^{(0)} - E\,X_i^{(0)} = b_{01}\,(X_i^{(1)} - E\,X_i^{(1)}) + b_{02}\,(X_i^{(2)} - E\,X_i^{(2)}) + b_{03}\,(X_i^{(3)} - E\,X_i^{(3)}) + \ldots + b_{on}\,(X_i^{(n)} - X_i^{(n)}) + E_i - E\,E_i \quad [17^c]$$

En désignant les écarts des termes de chaque série sur son espérance mathématique (laquelle, comme nous l'avons adopté, est la même pour tous les termes de chacune des séries) par les lettres minuscules de l'alphabet, avec les mêmes indices, c'est-à-dire:

$$X_i^{(0)} - E\,X^{(0)} = x_i^{(0)},\quad X_i^{(1)} - E\,X^{(1)} = x_i^{(1)},\ \text{etc.},\quad E_i - E\,E = e_i$$

nous obtenons:

$$x_i^{(0)} = b_{01}\,x_i^{(1)} + b_{02}\,x_i^{(2)} + b_{03}\,x_i^{(3)} + \ldots\ldots + b_{on}\,x_i^{(n)} + e_i \quad [18]$$

Si la liaison entre les termes de la série № 0 et ceux des autres séries du système [14] a vraiment un caractère linéaire, le terme résiduel e_i figurant dans [18] doit être petit et d'autant moindre (bien entendu dans les limites des fluctuations accidentelles) que le caractère linéaire de la liaison se manifeste d'une manière plus parfaite. Les véritables grandeurs des paramètres b sont inconnues. Afin de trouver leurs valeurs approchées, nous recourons à la „méthode des moindres carrés" et parmi toutes les valeurs possibles des paramètres nous choisissons celle de leurs combinaisons, à laquelle l'espérance mathématique du carré du terme résiduel e_i sera la moindre:

$$E\,e_i^2 = \text{minimum} \quad [19]$$

Bien entendu, l'adoption de la condition $E e_i^3 = \text{minimum}$ ou $E\,e_i^4 = \text{minimum}$ nous aurait amenés à des valeurs tout différentes des valeurs approchées des paramètres b. La condition [19] est toutefois la plus simple *au point de vue de la technique mathématique*. En appliquant les règles du calcul différentiel en vue de trouver les minimum des fonctions*), nous obtenons sans trop d'efforts les approximations recherchées.

(Deux espèces d'erreurs sont particulières à ces approximations: primo, c'est à peine si, comme nous l'avons supposé, les variables $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$, etc. réagissent avec toute leur valeur sur $X^{(0)}$; il faut plutôt croire qu'elles se décomposent en ξ et en ε, dont seulement ξ influe sur $X^{(0)}$; secondo, notre déduction est basée sur l'application de la méthode des moindres carrés, dont le principe n'est qu'une hypothèse plus ou moins vraisemblable).

*) Voir détails dans „Korrelationsrechnung", pages 133—134.

On obtient les résultats suivants:

$$b_{01} = \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\,\beta_{01\cdot234\ldots n};\quad b_{02} = \frac{\sigma_0}{\sigma_2}\,\beta_{02\cdot134\ldots n}$$

et, d'une façon générale:

$$b_{0j} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j}\,\beta_{0j\cdot1234\ldots n} \quad [20]$$

où σ_0 est l'écart-type à priori de la série № 0, σ_1 — celui de la première série, σ_j — celui de la série № j, etc. Comme nous le voyons, les approximations des véritables paramètres „b" dans l'équation [18] sont déterminées comme fonctions de quelques grandeurs à priori; c'est pour cela que, malgré les erreurs systématiques qui leur sont particulières, elles restent toujours des grandeurs à priori. On les appelle les *coefficients à priori de la régression.*

En ce qui concerne les coefficients du type $\beta_{0j.1234\ldots n}$, leurs indices du côté droit, en bas, sont construits de la manière suivante: le premier chiffre indique le numéro de la série qui se trouve dans la partie gauche de l'équation [18], le deuxième chiffre montre le numéro de la série à laquelle se rapporte le coefficient, et les chiffres à gauche du point énoncent les numéros de toutes les autres séries, dont les représentants entrent dans l'équation [18].

Pour trouver les valeurs des coefficients β, nous utilisons le système suivant (pour simplifier le problème, nous éliminons tous les chiffres à droite du point, dans les indices de β):

$$\left.\begin{array}{l} r_{01} - \beta_{01} - \beta_{02}\,r_{12} - \beta_{03}\,r_{13} - \ldots - \beta_{on}\,r_{1n} = 0 \\ r_{02} - \beta_{01}\,r_{12} - \beta_{02} - \beta_{03}\,r_{23} - \ldots - \beta_{on}\,r_{2n} = 0 \\ r_{03} - \beta_{01}\,r_{13} - \beta_{02}\,r_{23} - \beta_{03} - \ldots - \beta_{on}\,r_{3n} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{on} - \beta_{01}\,r_{1n} - \beta_{02}r_{2n} - \beta_{03}r_{3n} - \ldots - \beta_{on} = 0 \end{array}\right\} [21]$$

Les coefficients r sont les coefficients à priori de la corrélation. Leurs indices indiquent les numéros des séries auxquelles ils se rapportent. Par exemple, r_{01} est le coefficient de corrélation pour les séries № 0 et № 1; r_{12} est le coefficient de corrélation pour les séries № № 1 et 2, etc.

Nous nous servons du système [21] de la manière suivante:

Si dans la partie droite de l'équation [18] ne se trouve qu'une seule variable $x_i^{(1)}$ avec son coefficient b_{01}, il n'existe qu'un seul β_{01} et un seul r_{01}. Tous les autres coefficients du système [21] deviennent nuls, et on a:

$$r_{01} - \beta_{01} = 0;\ \text{d'où}\ \beta_{01} = r_{01}$$

Si l'équation [18] a la forme:

$$x_i^{(0)} = b_{01}\,x_i^{(1)} + b_{02}\,x_i^{(2)} + e_i$$

ce n'est que les coefficients r_{01}, r_{02} et r_{12} qui restent alors réels; tous les autres deviennent nuls et on a deux équations:

$$r_{01} - \beta_{01\cdot2} - \beta_{02\cdot1}\,r_{12} = 0$$
$$r_{02} - \beta_{01\cdot2}\,r_{12} - \beta_{02\cdot1} = 0$$

d'où l'on obtient:

$$\beta_{01\cdot2} = \frac{r_{01} - r_{02}\,r_{12}}{1 - r_{12}^2}\quad \text{et}\quad \beta_{02\cdot1} = \frac{r_{02} - r_{01}\,r_{12}}{1 - r_{12}^2} \quad [22]$$