нитѣ приближения: отначало приемаме, че $X^{(0)} = b_{01}' X^{(1)} + b_{02}' X^{(2)} + E'$; ако изчисления резултатъ не ни задоволява, - ние отиваме понататъкъ и предполагаме, че

$X^{(0)} = b_{01}'' X^{(1)} + b_{02}'' X^{(2)} + b_{03}'' X^{(3)} + E''$. Ако и това се окаже недостатъчно, пишемъ

$$X^{(0)} = b_{01}''' X^{(1)} + b_{02}''' X^{(2)} + b_{03}''' X^{(3)} + b_{04}''' X^{(4)} + E''' \text{ и т. н. и т. н.}$$

Сравнявайки тѣзи уравнения, ние виждаме, че въ E' влизатъ компонентитѣ $X^{(3)}$ и $X^{(4)}$; въ E'' влиза още $X^{(4)}$ и т. н. При тѣзи условия, и ако коефициентитѣ при $X^{(3)}$, $X^{(4)}$ и т. н. не сж равни на нула, ние никакъ не можемъ да постулираме независимостьта на E' или E'' отъ $X^{(0)}$ и даже отъ останалитѣ промѣнливи $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ и т. н., влизащи въ уравнението. Само, когато сме убедени, че въ система [16] ние сме изчерпили всичкитѣ промѣнливи, които могатъ да влияятъ върху голѣмината на членоветѣ отъ нулевия редъ, само тогава имаме право да допуснемъ независимостьта на остатъчния членъ E отъ компонентитѣ X.

Ако равенствата на система [17] сж вѣрни, ние можемъ да се ограничимъ съ разглеждането на единъ, който и да е, редъ отъ системата, понеже всички намѣрени за него закономѣрности ще сж вѣрни и за останалитѣ редове.

Да вземемъ i-тия редъ:

$$X_i^{(0)} = b_{01} X_i^{(1)} + b_{02} X_i^{(2)} + b_{03} X_i^{(3)} + \ldots\ldots + b_{0n} X_i^{(n)} + E_i \quad [17a]$$

Вземайки предъ видъ, че математическото очакване на сбора е винаги равно на сбора отъ математическитѣ очаквания на събираемитѣ и че константния множитель може да се изнесе извънъ знака E, ние имаме:

$$E X_i^{(0)} = b_{01} E X_i^{(1)} + b_{02} E X_i^{(2)} + b_{03} E X_i^{(3)} + \ldots\ldots + b_{0n} E X_i^{(n)} + E E_i \quad [17b]$$

Като извадимъ [17b] почленно отъ [17a], получаваме:

$$X_i^{(0)} - E X_i^{(0)} = b_{01} (X_i^{(1)} - E X_i^{(1)}) + b_{02} . (X_i^{(2)} - E X_i^{(2)}) + b_{03} (X_i^{(3)} - E X_i^{(3)}) + \ldots\ldots + b_{0n} (X_i^{(n)} - E X_i^{(n)}) + E_i - E E_i \quad [17c]$$

Като означимъ отклоненията на членоветѣ на всѣки редъ отъ математическото му очакване (което, както сме приели, е едно и сжщо за всички членове на всѣки единъ редъ) чрезъ малкитѣ букви на азбуката, съ сжщитѣ индекси, т. е. $X_i^{(0)} - E X^{(0)} = x_i^{(0)}$, $X_i^{(1)} - E X^{(1)} = x_i^{(1)}$ и т. н., $E_i - E E = e_i$, получаваме:

$$x_i^{(0)} = b_{01} x_i^{(1)} + b_{02} x_i^{(2)} + b_{03} x_i^{(3)} + \ldots\ldots + b_{0n} x_i^{(n)} + e_i \quad [18]$$

Ако връзката между членоветѣ на нулевия редъ и членоветѣ на останалитѣ редове на система [14] наистина има линеенъ характеръ, остатъчния членъ e_i въ [18] трѣбва да бжде малъкъ и то толкова по-малъкъ (разбира се, въ предѣлитѣ на случайнитѣ колебания), колкото по-съвършено се проявява линейния характеръ на връзката. Истинскитѣ голѣмини на параметритѣ b не сж ни известни. За да намѣримъ приближенитѣ имъ значения, прибѣгваме къмъ „метода на най-малкитѣ квадрати" и отъ всички възможни стойности на параметритѣ избираме оная имъ комбинация, при която математическото очакване на квадрата на остатъчния членъ e_i ще е най-малко:

$$E\, e_i^2 = \text{минимумъ} \quad [19]$$

Разбира се, възприемането на условие $E\, e_i^3 = $ минимумъ или $E\, e_i^4 = $ минимумъ би ни довело до съвсемъ други стойности на приближенитѣ значения на параметритѣ b. Условие [19] е, обаче, най-простото отъ *гледна точка на математическата техника.* Прилагайки правилата на диференциалното смѣтане за намиране минимума на функциитѣ*), получаваме безъ много трудъ търсенитѣ приближения.

(На последнитѣ сж присжщи два рода грѣшки: първо, едва ли, както сме предположили, промѣнливитѣ $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ и т. н. въздействуватъ съ цѣлата си стойность върху $X^{(0)}$; по-скоро трѣбва да се вѣрва, че въ действителность тѣ се разпадатъ на ξ и е, отъ които само ξ влияе върху $X^{(0)}$; второ, нашия изводъ се базира върху прилагането метода на най-малкитѣ квадрати, основната предпоставка на който е само една повече или помалко правдоподобна хипотеза).

Ние получаваме следнитѣ резултати:

$$b_{01} = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \beta_{01 \cdot 234 \ldots n}; \quad b_{02} = \frac{\sigma_0}{\sigma_2} \beta_{02 \cdot 134 \ldots n} \text{ и,}$$

$$\text{изобщо, } b_{0j} = \frac{\sigma_0}{\sigma_j} \beta_{0j \cdot 1234 \ldots n} \quad [20]$$

Тукъ σ_0 е априорното стандартно отклонение на нулевия редъ, σ_1 — априорното стандартно отклонение на първия редъ, σ_j — априорното стандартно отклонение на реда № j и т. н. Както виждаме, нашитѣ приближения къмъ истинскитѣ параметри „b" въ уравнение [18] се опредѣлятъ като функции на нѣколко априорни величини; и затова, въпрѣки присжщитѣ имъ систематически грѣшки, тѣ си оставатъ, все пакъ, априорни величини. Ние ги наричаме *априорни коефициенти на регресията.*

Що се отнася до коефициентитѣ отъ типа $\beta_{0j \cdot 1234 \ldots n}$, то тѣхнитѣ индекси отъ дѣсно, долу, сж построени по следния начинъ: първата цифра показва № на реда, който се намира въ лѣвата часть на уравнение [18], втората цифра посочва № на реда, за който се отнася коефициента, а цифритѣ на дѣсно отъ точката изброяватъ нумерата на всички други редове, представителитѣ на които влизатъ въ уравнение [18].

За намиране значенията на коефициентитѣ β ние имаме следната система (за простота

*) Подробности гл. въ „Korrelationsrechnung" стр. 133—134.