Като веземемъ предъ видъ, че англичанитѣ наричатъ *«емпирично стандартно отклонение»* величинитѣ

$$\sigma_1' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}} \quad \text{и} \quad \sigma_2' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i^2}{N}} \;*) \quad [2]$$

можемъ да пишемъ:

$$r_{12}' = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i}{N\, \sigma_1'\, \sigma_2'} \quad [3]$$

Отъ друга страна, означавайки b_1' чрезъ b_{12}' и b_2' чрезъ b_{21}', ние имаме:

$$b_{12}' = \frac{\sigma_1'}{\sigma_2'}\, r_{12}';\; b_{21}' = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'}\, r_{21}' \text{ (понеже } r_{12}' = r_{21}') \quad [4]$$

Коефициентътъ r_{12}' се нарича *емпириченъ коефициентъ на корелацията,* а b_{12}' и b_{21}' — *емпирични коефициенти на регресията.*

Изследването на математическитѣ свойства на коефициента на корелацията r_{12}' довежда до следнитѣ изводи: максималното негово значение е $+1$; то се достига само, когато между съответнитѣ членове на 2-та реда сѫществува съотношение на права пропорционалность, т. е. когато $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \ldots = \frac{x_N}{y_N} = d,$ и при това d е по-голѣмо отъ нулата. Ако сѫщитѣ пропорции оставатъ въ сила, но даватъ d отрицателно, тогава ние имаме обратна пропорционалность между членоветѣ на 2-та реда и коефициента на корелацията r_{12}' стига своя минимумъ — 1. Изобщо, колкото връзката между съответнитѣ членове на 2-та реда е по-отдалечена отъ „идеалната“ връзка на пропорционалностьта (права или обратна), толкова по-вече коефициента r_{12}' се доближава до нула, което значение се достига, най-после, когато

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i = 0$$

Обаче, както ще видимъ по-долу, значението на $r_{12}' = 0$ още не означава, че между x и y нѣма никаква зависимость.

Изложениятъ изводъ отъ формулата за коефициента на корелацията (особено, ако той е усложненъ съ разглеждането на редоветѣ и колонитѣ на тъй наречената корелационна таблица съ класови интервали) крие въ себе си голѣми опасности, понеже създава лесно преувеличена представа за значението на този коефициентъ и за предѣлитѣ на неговото прилагане, които изглеждатъ по-широки, отколкото сѫ въ действителность.

*) По правилно би било да се постави въ знаменателя на подкоренната величина не N, а (N—1); но при що-годе значително N тази поправка нѣма почти никакво практическо значение.

Даже въ случай, когато закона за връзката (зависимостьта) между x_i и y_i може съ успѣхъ да се представи въ видъ на уравнение отъ първа степень и е замъгленъ само отъ незначителни *случайни* причини, коефициентътъ на корелацията, изобщо казано, не дава пълна характеристика на всичкитѣ особености на тази зависимость. Заедно съ другитѣ 4 параметри, той я дава само тогава, когато законътъ на взаимозависимостьта на двата реда представлява тъй наречената „нормална повърхность на корелацията“, т. е. само въ единъ частенъ случай*).

Точно така, едно измѣрване на дължината на парахода, макаръ че представлява една много важна техническа характеристика, не ни дава още точна представа, нито за неговата широчина и тонажъ, нито за неговата бързина и други морски качества. Обаче, ако ни е известенъ точниятъ типъ на парахода (напр., свърхдреднаутъ, линеенъ крайцеръ и др.), тогава сѫщото измѣрване на дължината говори на специалиста много повече.

Ако зависимостьта между y и x нѣма линеенъ характеръ, тогава коефициентътъ на корелацията може да доведе до съвсемъ невѣрни изводи. Освенъ това, не може достатъчно да се подчертае обстоятелството, че коефициента на корелацията не може никакъ да се прилага извънъ установенитѣ предѣли на свободни, стохастически връзки, т. е. извънъ случаитѣ, при които, изобщо, има смисълъ да се измѣрва силата или степеньта на връзката между два или повече редове. Въпросътъ за „тѣснотата“ (така ще наричаме интензивностьта, якостьта — б. пр.) на връзката между две математически функции на една и сѫща промѣнлива нѣма никакъвъ смисълъ: връзката между x и Sin x е точно толкова „тѣсна“, колкото между x и x^2, или x и kx. Това ограничение не изпъква направо отъ изложения изводъ на формулата, обаче справедливостьта му може лесно да се докаже съ нѣколко примѣри.

Нека имаме 2 реда:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots\ N$$
$$\text{и } 1k,\ 2k,\ 3k,\ 4k,\ 5k,\ 6k\ \ldots\ Nk$$

Между съответнитѣ членове на тия два реда сѫществува пропорционалность и, както отбелязахме по-горе, коефициента на корелацията приема значение $+1$, ако k е положително, и -1, ако k е отрицателно. Да веземемъ сега съотношението между реда на първитѣ степени на натуралнитѣ числа и на квадратитѣ имъ.

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \ldots\ N$$
$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2\ \ldots\ N^2$$

Оказва се, че тѣхния коефициентъ на корелацията промѣня голѣмината си въ зависимость отъ последното число N, съ което свършва реда; въ предѣла, когато N се стреми къмъ безкрайность, този коефициентъ се равнява на $+0,968$.

*) Ср. моята, цитирана по-горе: „Korrelationsrechnung“, стр. 104.